ردیف	سوالات	نمره
۱	درستی یا نادرستی هرکدام از عبارت‌های زیر را مشخص کنید. الف) عدد ۴۹۶ به دسته همنهشتی $[2]_9$ تعلق دارد. ب) گراف کامل ۸ رأسی دارای ۳۶ یال است. پ) دو مربع لاتین متعامد 2×2 وجود ندارد. ت) تعداد توابع یک‌به‌یک از مجموعه ۴ عضوی به مجموعه ۸ عضوی برابر است با $P(8,4)$	۱
۲	هرکدام از عبارت‌های زیر را با کلمه یا عدد مناسب کامل کنید. الف) در هر گراف ساده تعداد رئوس دارای درجه فرد، عددی .... است. ب) با قرار دادن عدد .... به‌جای n در گذاره «$\forall n\in\mathbb{N}: 2^n+5\in p$» مثال نقض به وجود می‌آید. (p نماد عدد اول است.) پ) عدد احاطه گری در گراف C_n از رابطه .... $\gamma\geq$ به دست می‌آید. ت) با حروف کلمه «کوکب»، .... کلمه ۴ حرفی می‌توان نوشت.	۱
۳	ثابت کنید، اگر از مربع هر عدد فرد، یک واحد کم کنیم حاصل عددی مضرب ۸ می‌شود.	۱
۴	اگر $\sqrt{14}$ عددی گنگ باشد، با برهان خلف ثابت کنید $(\sqrt{7}+\sqrt{2})$ عددی گنگ است.	۱
۵	باقیمانده تقسیم عدد $A=41^{71}+50$ در تقسیم بر عدد ۳۵ را به دست آورید.	۱
۶	به چند طریق می‌توان ۵۹۰۰۰ تومان را با اسکناس‌های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی پرداخت کرد؟	۱/۵
۷	در گراف G داریم: $E(G)=\{ab,ac,bd,ce,ae\}$ و $V(G)=\{a,b,c,d,e,f\}$ مطلوبست: الف) رسم نمودار گراف G ب) حاصل $4p-3\Delta$ پ) مجموعه $N_G[a]$ ت) درجهٔ رأس f در گراف مکمل G ث) نوشتن یک دور دلخواه در گراف G	۱/۷۵
۸	الف) گراف همبند را تعریف کنید. ب) یک گراف ناهمبند ۵ رأسی رسم کنید. پ) عدد احاطه گری گراف P_5 را پیدا کنید.	۱

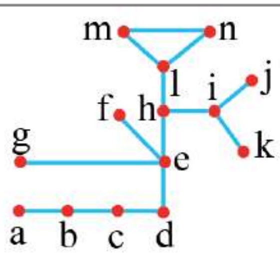
پایه دوازدهم دورهٔ دوم متوسطه

مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه

نام و نام خانوادگی:

سوالات امتحان نهایی درس: ریاضیات گسسته

رشته: ریاضی فیزیک

ردیف	سوالات	نمره
۹	گراف ۳- منتظم ۴ رأسی چند مجموعهٔ احاطه‌گر دارد؟ چرا؟	۱
۱۰	گراف ۶ رأسی با عدد احاطه گری ۲ رسم کنید که: الف) یک مجموعهٔ احاطه‌گر یکتا به اندازه ۲ داشته باشد. ب) بیش از یک مجموعهٔ احاطه گر به اندازه ۲ داشته باشد	۱
۱۱	با توجه به گراف مقابل، به سؤالات پاسخ دهید. الف) یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال مشخص کنید که مینیمم نباشد. ب) عدد احاطه گری گراف را مشخص کنید و ادعای خود را ثابت کنید. 	۱/۵
۱۲	۴ کتاب فیزیک، ۵ کتاب ریاضی و ۳ کتاب شیمی مختلف را به چند حالت می‌توان در یک قفسه کنار هم قرارداد به طوری که: الف) فقط کتاب‌های فیزیک کنار هم باشند. ب) کتاب‌های همنام کنار هم باشند. پ) کتاب‌های ریاضی و فیزیک یکی در میان باشند.	۱/۲۵
۱۳	به چند حالت می‌توان دسته‌گلی شامل ۱۰ شاخه با ۴ نوع گل ساخت به‌طوری‌که از گل نوع اول حداقل ۲ شاخه، از گل نوع دوم بیشتر از ۲ شاخه و از گل نوع چهارم دقیقاً یک شاخه انتخاب شود؟	۱/۵
۱۴	۳ تعمیرکار خودرو در ۳ روز اول هفته می‌خواهند روی ۳ اتومبیل ایرانی و ۳ اتومبیل خارجی داخل تعمیرگاه کار کنند. به‌گونه‌ای برنامه‌ریزی نمایید که هرکدام از تعمیرکارها روی هر یک از اتومبیل‌های ایرانی و خارجی کار کنند و هر اتومبیل هم دقیقاً یک‌بار به وسیله هر تعمیرکار مورد بررسی قرار گیرد.	۱/۵
۱۵	به چند طریق می‌توان ۶ عدد کتاب متمایز را بین ۳ نفر تقسیم کرد، به‌طوری‌که هر نفر حداقل یک کتاب دریافت کند.	۰/۵
۱۶	در مجموعه S={۱۵۱,۱۵۲,...,۵۰۰} چند عدد طبیعی وجود دارد که بر هیچ‌کدام از اعداد ۳ و ۴ و ۵ بخش‌پذیر نباشد.	۱/۵
۱۷	در یک روستا حداقل ۴ نفر روز تولد یکسانی در سال دارند. این روستا حداقل چند نفر جمعیت دارد. چرا؟ (سال را غیر کبیسه در نظر بگیرید.)	۱
	موفق باشید.	۲۰

ردیف	پاسخبرگ	نمره
	شما می‌توانید این پاسخبرگ را پرینت بگیرید و پاسخ‌های خود را در آن بنویسید، و سپس عکس یا فایل اسکن شده پاسخبرگ را در سایت آپلود کنید. در صورت عدم پرینت پاسخبرگ، می‌توانید پاسخ سوالات را در یک برگه A۴ سفید به صورت خوش‌خط و منظم بنویسید و سپس در سایت آپلود کنید.	
۱	الف) .... ب) .... پ) .... ت)	۱
۲	الف) .... ب) .... پ) .... ت)	۱
۳		۱
۴		۱
۵		۱
۶		۱/۵

ردیف	پاسخبرگ	نمره
۷	الف) ب) پ) ت) ث)	۱/۷۵
۸	الف) ب) پ)	۱

ردیف	پاسخبرگ	نمره
۹		۱
۱۰	الف) ب)	۱
۱۱	الف) ب)	۱/۵
۱۲	الف) ب) پ)	۱/۲۵

ردیف	پاسخبرگ	نمره
۱۳		۱/۵
۱۴		۱/۵
۱۵		۰/۵

ردیف	پاسخبرگ	نمره
۱۶		۱/۵
۱۷		۱
	موفق باشید.	۲۰

سلام به همه مازی‌های عزیز

امسال امتحان نهایی شما به خاطر بحث تأثیر معدل توی کنکور اهمیت بسیار زیادی پیدا کرده و عقل سلیم حکم می‌کنه که امتحان نهایی رو به شدت جدی بگیرین. قبل از هر چیز لازمه که بدونیم توی نوبت خرداد ماه و برای درس ریاضیات گسسته بارم‌بندی به چه صورتی هست، ببینید:

ریاضیات گسسته
- فصل اول (آشنایی با نظریه اعداد) : ۵ نمره
- فصل دوم (گراف و مدل‌سازی تا صفحه ۴۲) : ۲ نمره
- فصل دوم (گراف و مدل‌سازی ازصفحه ۴۲ به بعد) : ۵ نمره
- فصل سوم (ترکیبات): ۸ نمره

همون‌طور که می‌بینید، ارزش نمره‌ای فصل ۸ از همهٔ فصل‌ها بیشتره و برای این‌که بتونید بهترین نتیجه ممکن رو کسب کنید باید همه فصل‌های کتاب رو جدی بگیرین.

حالا بریم که یه ذره ریزتر فصل‌های کتاب و سؤالایی که احتمال مطرح شدن اونا زیاده رو بررسی کنیم. فقط قبل از ورود به این قسمت لازمه که این نکته مهم رو بهتون بگم که سعی کنید روی مثال‌ها، کاردرکلاس‌ها و از همه مهم‌تر روی تمرین‌های کتاب به شدت مسلط بشید چرا که سوابق امتحان نهایی توی سال‌های گذشته ثابت کرده که این قسمت‌ها می‌تونن منبع اصلی طرح سؤال‌های امتحانی باشن (گاهاً سؤال‌های این قسمت‌ها حتی بدون تغییر عدد توی امتحان اومدن).

فصل اول (آشنایی با نظریه اعداد):

۱) از درس استدلال ریاضی سؤال‌هایی که مطرح می‌شه معمولاً در قالب درست یا نادرست و یا به‌صورت اثباتی هستن؛ یعنی این‌که گزاره‌ای رو به شما می‌دن و ازتون می‌خوان که درست یا نادرست بودن اون رو ثابت کنید.

۲) از درس بخش‌پذیری در اعداد صحیح هم معمولاً از قسمت‌های ویژگی‌های رابطه عاد کردن، ب.م.م و ک.م.م و همچنین قضیه تقسیم سؤالاتی مطرح می‌شه که این سؤال‌ها می‌تونه در قالب جای خالی و یا به احتمال بیش‌تر، در قالب سؤال مستقیم از این قسمت‌ها باشه.

۳) شاید بشه گفت که درس هم‌نهشتی مهم‌ترین درس از فصل اول باشه که می‌تونه سؤال‌های مستقیمی از اون مطرح بشه. مثلاً سؤال‌هایی در رابطه با ویژگی‌های هم‌نهشتی، باقی‌مانده تقسیم، مسائل تقدیمی و از همه مهم‌تر، معادله هم‌نهشتی و حل معادلات سیاله.

فصل دوم (گراف و مدل‌سازی):

۱) یه تیپ سؤال روتینی که از درس معرفی گراف می‌تونه بیاد، به این صورته که یه گراف به شما می‌دن و ازتون می‌خوان که به چندتا سؤال در رابطه با اون گراف جواب بدید که این سؤال‌ها می‌تونن در رابطه با ماکزیمم و مینیمم درجه رأس‌های گراف، مرتبه یا اندازه گراف، مجموعه همسایه‌های (باز یا بسته) یک رأس خاص، رسم گراف مکمل اون گراف، مسیر، دور و یا بررسی همبند بودن اون گراف باشن.

۲) بعضی از سال‌ها هم چندتا سؤال جای خالی از مفاهیم و روابط اولیه گراف مطرح شده که دونستن این موضوع هم خالی از لطف نیست.

۳) گاهی اوقات هم از شما می‌خوان که گرافی با یک سری از ویژگی‌های خاص رو رسم کنید؛ به عنوان مثال میگن که گراف ۴ رأسی غیرتهی $K-$ منتظمی رسم کنید که K کم‌ترین (یا بیش‌ترین) مقدار ممکن را داشته باشد.

۴) از قسمت مدل‌سازی با گراف، بیش‌ترین فراوانی سؤالات سال‌های گذشته مربوط به بحث مجموعه احاطه‌گر مینیمم و پیدا کردن عدد احاطه‌گری یک گراف است.

فصل سوم (ترکیبات):

می‌شه گفت که مدل‌ها و تیپ سؤال‌هایی که از این فصل کتاب مطرح می‌شن، تقریباً مشخصه و این سؤال‌ها عموماً پیچیدگی خاصی ندارن و تنها با دیدن چند نمونه از اونا می‌شه ساختار کلی اغلب سؤالات رو شناسایی کنیم و به اونا جواب بدیم که عبارتند از:

۱) سؤال‌هایی در رابطه با تعداد جایگشت چند شیء متمایز که توی اونا مثلاً چند شیء خاص کنار هم باشن یا این‌که فلان اشیاء به‌صورت یک در میان قرار بگیرن و...

۲) مسائل مربوط به تعداد جایگشت‌های چند شیء که توی اونا اشیاء یکسان هم وجود داشته باشن.

۳) مسائل مربوط به پیدا کردن تعداد جواب‌های صحیح و مثبت و یا پیدا کردن تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی یک معادله.

۴) مسائل مربوط به مربع لاتین و بررسی متعامد بودن دو مربع لاتین.

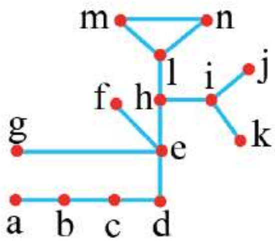
۵) اصل شمول و عدم شمول.

۶) اصل لانه کبوتری و تعمیم آن.

و اما توصیه‌های پایانی...

- ✓ قبل از تحویل پاسخ‌نامه امتحانی، حتماً حتماً یه بار دیگه جواب‌هایی که دادی رو چک کن تا یه وقت خدای نکرده، جایی اشتباه نکرده باشی.
- ✓ برای جواب دادن به سؤال‌ها به هیچ عنوان از روش‌های سریع و اصطلاحاً روش‌های تستی استفاده نکن و سعی کن پاسخ تشریحی رو به‌صورت کامل بنویسی (البته توی سؤال‌هایی که چهارگزینه‌ای هستن اگه راه بده می‌تونی ازشون استفاده کنی یا زمانی که می‌خوای جوابی که به‌دست آوردی رو چک کنی که درسته یا نه هم می‌تونی از این روش‌ها استفاده کنی.)
- ✓ سعی کن که هیچ سؤالی رو بدون جواب نذاری.

ردیف	سوالات	نمره
۱	درستی یا نادرستی هرکدام از عبارت‌های زیر را مشخص کنید. الف) عدد ۴۹۶ به دسته همنهشتی $[۲]_۹$ تعلق دارد. ب) گراف کامل ۸ رأسی دارای ۳۶ یال است. پ) دو مربع لاتین متعامد ۲×۲ وجود ندارد. ت) تعداد توابع یک‌به‌یک از مجموعه ۴ عضوی به مجموعه ۸ عضوی برابر است با $P(۸,۴)$	۱
۲	هرکدام از عبارت‌های زیر را با کلمه یا عدد مناسب کامل کنید. الف) در هر گراف ساده تعداد رئوس دارای درجه فرد، عددی .... است. ب) با قرار دادن عدد .... به‌جای n در گذاره « $\forall n\in\mathbb{N}: ۲^n+۵\in p$ » مثال نقض به وجود می‌آید. (p نماد عدد اول است.) پ) عدد احاطه گری در گراف C_n از رابطه .... $\gamma\geq$ به دست می‌آید. ت) با حروف کلمه «کوکب»، .... کلمه ۴ حرفی می‌توان نوشت.	۱
۳	ثابت کنید، اگر از مربع هر عدد فرد،یک واحد کم کنیم حاصل عددی مضرب ۸ می‌شود.	۱
۴	اگر $\sqrt{۱۴}$ عددی گنگ باشد، با برهان خلف ثابت کنید $(\sqrt{۷}+\sqrt{۲})$عددی گنگ است.	۱
۵	باقیمانده تقسیم عدد $A=۴۱^{۷۱}+۵۰$ در تقسیم بر عدد ۳۵ را به دست آورید.	۱
۶	به چند طریق می‌توان ۵۹۰۰۰ تومان را با اسکناس‌های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی پرداخت کرد؟	۱/۵
۷	در گراف G داریم: $E_{(G)}=\{ab,ac,bd,ce,ae\}$ و $V_{(G)}=\{a,b,c,d,e,f\}$ مطلوبست: الف) رسم نمودار گراف G ب) حاصل $۴p-۳\Delta$ پ) مجموعه $N_G[a]$ ت) درجهٔ رأس fدر گراف مکمل G ث) نوشتن یک دور دلخواه در گراف G	۱/۷۵
۸	الف) گراف همبند را تعریف کنید. ب) یک گراف ناهمبند ۵ رأسی رسم کنید. پ) عدد احاطه گری گراف $P_۵$ را پیدا کنید.	۱
۹	گراف ۳- منتظم ۴ رأسی چند مجموعهٔ احاطه‌گر دارد؟ چرا؟	۱

ردیف	سوالات	نمره
۱۰	گراف ۶ رأسی با عدد احاطه گری ۲ رسم کنید که: الف) یک مجموعهٔ احاطه‌گر یکتا به اندازه ۲ داشته باشد. ب) بیش از یک مجموعهٔ احاطه گر به اندازه ۲ داشته باشد	۱
۱۱	با توجه به گراف مقابل، به سؤالات پاسخ دهید. الف) یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال مشخص کنید که مینیمم نباشد. ب) عدد احاطه گری گراف را مشخص کنید و ادعای خود را ثابت کنید. 	۱/۵
۱۲	۴ کتاب فیزیک، ۵ کتاب ریاضی و ۳ کتاب شیمی مختلف را به چند حالت می‌توان در یک قفسه کنار هم قرارداد به طوری که: الف) فقط کتاب‌های فیزیک کنار هم باشند. ب) کتاب‌های همنام کنار هم باشند. پ) کتاب‌های ریاضی و فیزیک یکی در میان باشند.	۱/۲۵
۱۳	به چند حالت می‌توان دسته‌گلی شامل ۱۰ شاخه با ۴ نوع گل ساخت به‌طوری‌که از گل نوع اول حداقل ۲ شاخه، از گل نوع دوم بیشتر از ۲ شاخه و از گل نوع چهارم دقیقاً یک شاخه انتخاب شود؟	۱/۵
۱۴	۳ تعمیرکار خودرو در ۳ روز اول هفته می‌خواهند روی ۳ اتومبیل ایرانی و ۳ اتومبیل خارجی داخل تعمیرگاه کار کنند. به‌گونه‌ای برنامه‌ریزی نمایید که هرکدام از تعمیرکارها روی هر یک از اتومبیل‌های ایرانی و خارجی کار کنند و هر اتومبیل هم دقیقاً یک‌بار به وسیله هر تعمیرکار مورد بررسی قرار گیرد.	۱/۵
۱۵	به چند طریق می‌توان ۶ عدد کتاب متمایز را بین ۳ نفر تقسیم کرد، به‌طوری‌که هر نفر حداقل یک کتاب دریافت کند.	۰/۵
۱۶	در مجموعه $S=\{151,152,\ldots,500\}$ چند عدد طبیعی وجود دارد که بر هیچ‌کدام از اعداد ۳ و ۴ و ۵ بخش‌پذیر نباشد.	۱/۵
۱۷	در یک روستا حداقل ۴ نفر روز تولد یکسانی در سال دارند. این روستا حداقل چند نفر جمعیت دارد. چرا؟ (سال را غیر کبیسه در نظر بگیرید.)	۱
	موفق باشید.	۲۰

ردیف	پاسخبرگ	نمره
	شما می‌توانید این پاسخبرگ را پرینت بگیرید و پاسخ‌های خود را در آن بنویسید، و سپس عکس یا فایل اسکن شده پاسخبرگ را در سایت آپلود کنید. در صورت عدم پرینت پاسخبرگ، می‌توانید پاسخ سوالات را در یک برگه A4 سفید به صورت خوش‌خط و منظم بنویسید و سپس در سایت آپلود کنید.	
۱	الف) .... ب) .... پ) .... ت)	۱
۲	الف) .... ب) .... پ) .... ت)	۱
۳		۱
۴		۱
۵		۱
۶		۱/۵

ردیف	پاسخبرگ	نمره
۷	الف) ب) پ) ت) ث)	۱/۷۵
۸	الف) ب) پ)	۱

ردیف	پاسخبرگ	نمره
۹		۱
۱۰	الف) ب)	۱
۱۱	الف) ب)	۱/۵
۱۲	الف) ب) پ)	۱/۲۵

گروه آموزشی ماز

مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه

پایه دوازدهم دورهٔ دوم متوسطه

نام و نام خانوادگی:

پاسخبرگ امتحان نهایی درس: ریاضیات گسسته

رشته: ریاضی فیزیک

ردیف	پاسخبرگ	نمره
۱۳		۱/۵
۱۴		۱/۵
۱۵		۰/۵

ردیف	پاسخبرگ	نمره
۱۶		۱/۵
۱۷		۱
	موفق باشید.	۲۰

<table>
<tr><th>ردیف</th><th>پاسخنامه</th><th>نمره</th></tr>
<tr><td>۱</td><td>پاسخ تشریحی:
الف) نادرست (۰/۲۵)   ب) نادرست (۰/۲۵)   پ) درست (۰/۲۵)   ت) درست (۰/۲۵)</td><td>۱</td></tr>
<tr><td>۲</td><td>پاسخ تشریحی:
الف) زوج (۰/۲۵)   ب) ۲ (۰/۲۵)   پ) $\gamma \geq \left\lceil \frac{n}{۳} \right\rceil$ (۰/۲۵)   ت) $۱۲ = \frac{۴!}{۲!}$ (۰/۲۵)
توجه: در قسمت ب، هر عددی که دانش‌آموز انتخاب کرده باشد و حاصل عبارت، عدد اول نشود قابل قبول است. مانند ۲، ۴، ۸، ۱۶ و ...</td><td>۱</td></tr>
<tr><td>۳</td><td>پاسخ تشریحی:
هر عدد فرد $۲K+۱$
$\underbrace{(۲K+۱)^۲-۱}_{(۰/۲۵)} = ۴K^۲+۴K+۱-۱ = ۴K^۲+۴k \quad (۰/۲۵)$
$\overbrace{\underbrace{۴k(k+۱)}_{\text{ضرب دو عدد متوالی همیشه زوج است.}}}^{(۰/۲۵)} = ۴(۲q) = ۸q \quad (۰/۲۵)$</td><td>۱</td></tr>
<tr><td>۴</td><td>پاسخ تشریحی:
فرض $P: \sqrt{۱۴} \in Q^c$
حکم $q: (\sqrt{۲}+\sqrt{۷}) \in Q^c$
فرض خلف $(\sim q)$: $(\sqrt{۲}+\sqrt{۷}) \notin Q^c \rightarrow \underbrace{\sqrt{۲}+\sqrt{۷} \in Q}_{(۰/۲۵)} \rightarrow \sqrt{۲}+\sqrt{۷} = \frac{a}{b}\,;\ (a,b \in Z, b \neq ۰)$
طرفین رابطه به‌دست‌آمده را به توان ۲ می‌رسانیم:
$۲+۲\sqrt{۱۴}+۷ = \frac{a^۲}{b^۲} \xrightarrow{(۰/۲۵)} \sqrt{۱۴} = \frac{\overbrace{a^۲-۹b^۲}^{\in Z}}{\underbrace{۲b^۲}_{\in Z}} \Rightarrow \sqrt{۱۴} \in Q \quad (۰/۲۵)$
این نتیجه با فرض تناقض دارد پس فرض خلف باطل و حکم صحیح است. (۰/۲۵)</td><td>۱</td></tr>
<tr><td>۵</td><td>پاسخ تشریحی:
$۴۱ \overset{۳۵}{\equiv} ۶ \xrightarrow{\text{توان ۲}} \underbrace{(۴۱)^۲ \overset{۳۵}{\equiv} ۶^۲ \overset{۳۵}{\equiv} ۱}_{(۰/۲۵)} \xrightarrow{\text{به توان ۳۵}} \left((۴۱)^۲\right)^{۳۵} \overset{۳۵}{\equiv} ۱ \rightarrow \underbrace{(۴۱)^{۷۰} \overset{۳۵}{\equiv} ۱}_{(۰/۲۵)}$
حالا طرفین را در ۴۱ ضرب کرده و با عدد ۵۰ جمع می‌کنیم:
$\underbrace{(۴۱)^{۷۱}+۵۰ \overset{۳۵}{\equiv} ۴۱+۵۰}_{(۰/۲۵)} \rightarrow A \overset{۳۵}{\equiv} ۹۱ \overset{۳۵}{\equiv} ۲۱ \rightarrow A \overset{۳۵}{\equiv} ۲۱ \quad (۰/۲۵)$</td><td>۱</td></tr>
</table>

ردیف	پاسخنامه	نمره

۶ — نمره: ۱/۵

پاسخ تشریحی:

$۲۰۰۰x+۵۰۰۰y=۵۹۰۰۰ \Rightarrow ۲x+۵y=۵۹ \Rightarrow (۲,۵)=۱ \mid ۵۹$ (جواب دارد) (۰/۲۵)

$۵y \overset{۲}{\equiv} ۵۹ \to ۵ \overset{۲}{\equiv} ۱ \,,\, ۵۹ \overset{۲}{\equiv} ۱ \to y \overset{۲}{\equiv} ۱ \to y=۲K+۱ \quad (۰/۲۵)$

حال به کمک رابطه $۲x+۵y=۵۹$ داریم:

$۲x+۵(۲K+۱)=۵۹ \Rightarrow ۲x=-۱۰K+۵۴ \Rightarrow x=-۵K+۲۷ \quad (۰/۲۵)$

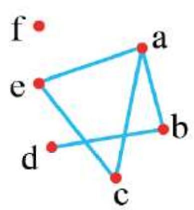
$$\begin{cases} y \geq ۰ \to ۲k+۱ \geq ۰ \to k \geq -\frac{۱}{۲} \quad (۰/۲۵) \\ \qquad\qquad \xrightarrow{\text{اشتراک}} K \in \{۰,۱,۲,۳,۴,۵\} \quad (۰/۲۵) \\ x \geq ۰ \to -۵k+۲۷ \geq ۰ \to k \leq \frac{۲۷}{۵} \quad (۰/۲۵) \end{cases}$$

پس به ۶ طریق این کار انجام می‌شود.

۷ — نمره: ۱/۷۵

پاسخ تشریحی:

الف) رسم گراف (۰/۵)



ب)

$$\begin{cases} p=۶ \\ \Delta=۳ \end{cases} \xrightarrow{(۰/۲۵)} ۴p-۳\Delta=۲۴-۹=۱۵ \quad (۰/۲۵)$$

پ)

$N_G[a]=\{a,b,c,e\} \quad (۰/۲۵)$

ت)

$\deg_{\bar{G}}(f)=۵ \quad (۰/۲۵)$

ث)

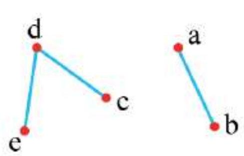
aeca (۰/۲۵)

۸ — نمره: ۱

پاسخ تشریحی:

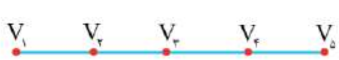
الف) گرافی که در آن از هر رأس دلخواه به هر رأس دیگر آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد. (۰/۵)

ب) رسم گراف (۰/۲۵)

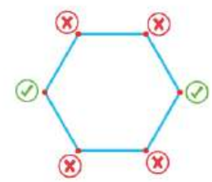


پ)

$P_۵$:



$\gamma=\left\lceil \frac{۵}{۳} \right\rceil=۲ \quad (۰/۲۵)$

ردیف	پاسخنامه	نمره
۹	**پاسخ تشریحی:** گراف ۳- منتظم ۴ رأسی یک گراف کامل است. (۰/۲۵) تعداد مجموعه احاطه گر: $\underbrace{\overset{\text{انتخاب یک راس}}{\binom{4}{1}}+\overset{\text{انتخاب دو راس}}{\binom{4}{2}}+\overset{\text{انتخاب سه راس}}{\binom{4}{3}}+\overset{\text{انتخاب چهار راس}}{\binom{4}{4}}}_{(0/5)}=4+6+4+1=15$ (۰/۲۵)	۱
۱۰	**پاسخ تشریحی:** الف) (۰/۵)  ب) (۰/۵) 	۱
۱۱	**پاسخ تشریحی:** الف) $\{b,e,j,k,l\}$ (۰/۵) ب) $\begin{cases} n=14 \\ \Delta=4 \end{cases} \Rightarrow \delta \geq \left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil = \left\lceil \frac{14}{5} \right\rceil \Rightarrow \delta \geq 3$ (۰/۲۵) مجموعه احاطه‌گر ۳ عضوی نداریم (۰/۲۵) اما مجموعه $\{b,e,i,n\}$ احاطه‌گر مینیمال است. (۰/۲۵) در نتیجه عدد احاطه‌گری ۴ است. $\delta=4$ (۰/۲۵)	۱/۵
۱۲	**پاسخ تشریحی:** الف) $\underbrace{\boxed{\text{بسته فیزیک}}}_{4!}$ + ۵ کتاب ریاضی + ۳ کتاب شیمی = ۹ شیء متمایز $\longrightarrow \overset{\text{۹ شیء}}{9!}\times\underset{\text{بسته فیزیک}}{4!}$ (۰/۲۵) ب) $\underbrace{\boxed{\text{بسته فیزیک}}}_{4!}+\underbrace{\boxed{\text{بسته ریاضی}}}_{5!}+\underbrace{\boxed{\text{بسته شیمی}}}_{3!}=\overset{\text{۳ بسته}}{3!}\times\underset{\text{بسته فیزیک}}{4!}\times\overset{\text{بسته ریاضی}}{5!}\times\underset{\text{بسته شیمی}}{3!}$ (۰/۵) پ) $\underbrace{\boxed{RFRFRFRFR}}_{5!\times4!}$ + ۳ کتاب شیمی = $\underset{\text{بسته + ۳ کتاب شیمی}}{4!}\times5!\times4!$ (۰/۵)	۱/۲۵

ردیف	پاسخنامه	نمره

۱۳ — نمره: ۱/۵

پاسخ تشریحی:

$x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ = ۱۰ \qquad (۰/۲۵)$

$x_۱ \geq ۲ \to x_۱ - ۲ \geq ۰ \to x_۱ - ۲ = y_۱ \to x_۱ = y_۱ + ۲ \qquad (۰/۲۵)$

$x_۲ > ۲ \to x_۲ \geq ۳ \to x_۲ - ۳ \geq ۰ \to x_۲ - ۳ = y_۲ \to x_۲ = y_۲ + ۳ \qquad (۰/۲۵)$

$x_۴ = ۱ \qquad (۰/۲۵)$

معادله جدید : $y_۱ + ۲ + y_۲ + ۳ + x_۳ + ۱ = ۱۰$

$$\underbrace{y_۱ + y_۲ + x_۳ = ۴}_{(۰/۲۵)} \xrightarrow[n=۴]{k=۳} \binom{n+k-۱}{k-۱} = \binom{۶}{۲} = ۱۵ \qquad (۰/۲۵)$$

تعداد حالت‌ها

۱۴ — نمره: ۱/۵

پاسخ تشریحی:

برای ماشین‌های خارجی یک مربع لاتین ۳×۳ طراحی می‌کنیم (مربع لاتین A)

$$\begin{cases} T = \text{تعمیرکار} \\ R = \text{روز} \end{cases}$$

کافی است مربع لاتین دیگری بنویسیم که با A متعامد باشد و طبق آن اتومبیل‌های ایرانی به تعمیرکارها سپرده شود (مربع لاتین B) (۰/۲۵)

(۰/۵)

	$T_۱$	$T_۲$	$T_۳$
$R_۱$	۱	۲	۳
$R_۲$	۳	۱	۲
$R_۳$	۲	۳	۱

«ماشین‌های خارجی»
(A)

(۰/۵)

	$T_۱$	$T_۲$	$T_۳$
$R_۱$	۲	۳	۱
$R_۲$	۳	۱	۲
$R_۳$	۱	۲	۳

«ماشین‌های داخلی»
(B)

نتیجه

(۰/۲۵)

	$T_۱$	$T_۲$	$T_۳$
$R_۱$	۱۲	۲۳	۳۱
$R_۲$	۳۳	۱۱	۲۲
$R_۳$	۲۱	۳۲	۱۳

۱۵ — نمره: ۰/۵

پاسخ تشریحی:

جواب این سؤال، تعداد توابع پوشا از یک مجموعه ۶ عضوی به یک مجموعه ۳ عضوی است (۰/۲۵) و برابر است با:

$۳^۶ - \left(۳ \times ۲^۶ - ۳\right) \qquad (۰/۲۵)$

۱۶ — نمره: ۱/۵

پاسخ تشریحی:

$S = \{۱۵۱, ۱۵۲, \ldots, ۵۰۰\} = \{۱, ۲, ۳, \ldots, ۵۰۰\} - \{۱, ۲, ۳, \ldots, ۱۵۰\} \to |S| = ۳۵۰$

$$\left.\begin{array}{l} \text{اعدادبخش‌پذیر بر ۳} = A \to |A| = \left[\frac{۵۰۰}{۳}\right] - \left[\frac{۱۵۰}{۳}\right] = ۱۶۶ - ۵۰ = ۱۱۶ \\ \text{اعدادبخش‌پذیر بر ۴} = B \to |B| = \left[\frac{۵۰۰}{۴}\right] - \left[\frac{۱۵۰}{۴}\right] = ۱۲۵ - ۳۷ = ۸۸ \\ \text{اعدادبخش‌پذیر بر ۵} = C \to |C| = \left[\frac{۵۰۰}{۵}\right] - \left[\frac{۱۵۰}{۵}\right] = ۱۰۰ - ۳۰ = ۷۰ \end{array}\right\} (۰/۵)$$

ردیف	پاسخنامه	نمره
	اعدادبخش‌پذیر بر ۱۲ $= A\cap B \rightarrow \lvert A\cap B\rvert = \left[\frac{۵۰۰}{۱۲}\right]-\left[\frac{۱۵۰}{۱۲}\right] = ۴۱-۱۲ = ۲۹$ اعدادبخش‌پذیر بر ۱۵ $= A\cap C \rightarrow \lvert A\cap C\rvert = \left[\frac{۵۰۰}{۱۵}\right]-\left[\frac{۱۵۰}{۱۵}\right] = ۳۳-۱۰ = ۲۳$ اعدادبخش‌پذیر بر ۲۰ $= B\cap C \rightarrow \lvert B\cap C\rvert = \left[\frac{۵۰۰}{۲۰}\right]-\left[\frac{۱۵۰}{۲۰}\right] = ۲۵-۷ = ۱۸$ اعدادبخش‌پذیر بر ۶۰ $= A\cap B\cap C \rightarrow \lvert A\cap B\cap C\rvert = \left[\frac{۵۰۰}{۶۰}\right]-\left[\frac{۱۵۰}{۶۰}\right] = ۸-۲ = ۶$ (۰/۵) $\lvert A\cup B\cup C\rvert = ۱۱۶+۸۸+۷۰-۲۹-۲۳-۱۸+۶ = ۲۱۰\ (۰/۲۵) \longrightarrow \lvert\overline{A\cup B\cup C}\rvert = \lvert S\rvert - ۲۱۰ = ۳۵۰-۲۱۰ = ۱۴۰\ (۰/۲۵)$	
۱۷	**پاسخ تشریحی:** $\begin{array}{l\|l} \bigcirc & ۳۶۵ \rightarrow n \\ \hline ۱ & \bigcirc \xrightarrow{+۱} ۴ \end{array}$ (۰/۲۵) $K+۱=۴ \rightarrow K=۳\ (۰/۲۵)$ $\underbrace{m_{min} = Kn+۱}_{(۰/۲۵)} = ۳(۳۶۵)+۱ = ۱۰۹۶\ (۰/۲۵)$ بنابراین حداقل جمعیت روستا ۱۰۹۶ نفر است.	۱
	موفق باشید.	۲۰

خلاصه نکات فصل اول

اثبات به روش برهان خلف:
برهان خلف نوعی اثبات غیرمستقیم است که در آن فرض می‌کنیم که حکم نادرست باشد و سپس با استفاده از قوانین منطق گزاره‌ها و استدلال‌های درست و مبتنی بر فرض، به یک نتیجه غیرممکن و یا نتیجه‌ای متضاد با فرض مسئله می‌رسیم و در نهایت معلوم می‌شود که فرضِ نادرست بودن حکم، باطل است و درستی حکم ثابت می‌گردد.

مثال:

اگر α و β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha+\beta$ گویا باشد ثابت کنید $\alpha-\beta$ گنگ است.

فرض خلف: فرض می‌کنیم $\alpha-\beta$ گویا باشد.

می‌دانیم جمع دو عدد گویا عددی گویا است پس:

$$(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)\in Q \to ۲\alpha \in Q \to \alpha \in Q$$

از طرفی طبق فرض‌مسئله می‌دانیم که α عددی گنگ است که با نتیجه فوق $(\alpha \in Q)$ در تناقض است.لذا فرض خلف باطل و حکم اثبات می‌شود.

اثبات به روش بازگشتی:
در این روش از حکم مسئله شروع می‌کنیم و با فرض درستی حکم، به یک رابطه بدیهی یا فرض مسئله می‌رسیم در استفاده از این روش برای ساده کردن حکم مسئله از گزاره‌های دو شرطی استفاده می‌کنیم.
توجه: گزاره دو شرطی $A \Leftrightarrow B$ ، زمانی درست است که گزاره‌های A و B هم‌ارزش باشند.

مثال:

به روش بازگشتی ثابت کنید اگر $a>۰$ آن‌گاه $a+\frac{۱}{a}\geq ۲$ است.

$$a+\frac{۱}{a}\geq ۲ \Leftrightarrow a^۲+۱\geq ۲a \Leftrightarrow a^۲-۲a+۱\geq ۰ \Leftrightarrow (a-۱)^۲\geq ۰ \to$$ همواره برقرار است

مثال:

به روش بازگشتی ثابت کنید حاصل‌ضرب هر دو عدد حقیقی، کوچک‌تر یا مساوی نصف مجموع مربعات آن‌ها است.

$$xy\leq \frac{x^۲+y^۲}{۲} \Leftrightarrow ۲xy\leq x^۲+y^۲ \Leftrightarrow x^۲+y^۲-۲xy\geq ۰ \Leftrightarrow (x-y)^۲\geq ۰ \to$$ همواره درست

مثال:

برای هر سه عدد حقیقی z و y و x ثابت کنید: $x^۲+y^۲+z^۲\geq xy+yz+xz$

$$x^۲+y^۲+z^۲\geq xy+yz+xz \Leftrightarrow ۲x^۲+۲y^۲+۲z^۲\geq ۲xy+۲yz+۲xz$$

$$\Leftrightarrow (x^۲+y^۲-۲xy)+(y^۲+z^۲-۲yz)+(x^۲+z^۲-۲xz)\geq ۰$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^۲+(y-z)^۲+(x-z)^۲\geq ۰ \to$$ همواره درست

اثبات با در نظر گرفتن همه حالت‌ها
گاهی برای اثبات یک گزاره لازم است که همه موارد ممکن در مورد مسئله را در نظر بگیریم.

مثال:

ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n، $n^۲-۵n+۷$ عددی فرد است.

دو حالت ممکن است رخ دهد:

الف) n زوج است.

$$n=۲k \to n^۲-۵n+۷=(۲k)^۲-۵(۲k)+۷=۲(۲k^۲-۵k+۳)+۱=۲q+۱$$

ب) n فرد است.

$$n=۲k-۱ \to n^۲-۵n+۷=(۲k-۱)^۲-۵(۲k-۱)+۷=۴k^۲-۱۴k+۱۳=۲(۲k^۲-۷k+۶)+۱=۲q+۱$$

که در هر دو حالت، حاصل یک عدد فرد است.

بخش‌پذیری:

عدد صحیح b را بر عدد صحیح و مخالف صفر a بخش‌پذیر گوییم هرگاه عدد صحیحی مانند q وجود داشته باشد به طوری که: $b = aq$

$a \mid b$ یعنی:
- عدد a شمارنده عدد b است.
- عدد a، عدد b را می‌شمارد.
- b بر a بخش‌پذیر است.
- b مضرب a است.
- a، مقسوم‌علیه b است.

ویژگی‌های رابطه عادکردن:

- $a \mid b \rightarrow \begin{cases} a \mid -b \\ -a \mid b \\ -a \mid -b \end{cases}$
- $a \mid b \rightarrow a \mid mb$
- $a \mid b \rightarrow a \mid b^n \ ; (n \in \mathbb{N})$
- $a \mid b \wedge b \mid c \rightarrow a \mid c$
- $a \mid b \wedge a \mid c \rightarrow a \mid b \pm c \xrightarrow{\text{تعمیم}} a \mid b \wedge a \mid c \rightarrow a \mid mb \pm nc$
- $a \mid b \xrightarrow{b \neq 0} |a| \leq |b| \xrightarrow{\text{نتیجه}} a \mid b \wedge b \mid a \rightarrow a = \pm b$
- $a \mid b \rightarrow a^n \mid b^n$
- $a \mid b \wedge c \mid d \rightarrow ac \mid bd$
- $a \mid b \xrightarrow{n \leq m} a^n \mid b^m$

مثال:

اگر عددی مانند k در Z باشد به طوری که $۵ \mid ۴k+۱$، ثابت کنید $۲۵ \mid ۱۶k^۲ + ۲۸k + ۶$.

$$\left.\begin{array}{l} ۵ \mid ۴k+۱ \xrightarrow[\text{طرفین}]{\text{توان ۲}} ۲۵ \mid ۱۶k^۲ + ۸k + ۱ \\ ۵ \mid ۴k+۱ \xrightarrow[\text{طرفین}]{\times ۵} ۲۵ \mid ۲۰k + ۵ \end{array}\right. \xrightarrow[\text{سمت‌راست}]{+} ۲۵ \mid ۱۶k^۲ + ۲۸k + ۶$$

نکته:

- هر عدد طبیعی و بزرگ‌تر از یک که هیچ شمارنده مثبتی به‌جز یک و خودش نداشته باشد عدد اول نامیده می‌شود.

مجموعه اعداد اول : $p = \{۲, ۳, ۵, ۷, ۱۱, \cdots\}$

- اگر p عددی اول و a عددی طبیعی بوده و $a \mid p$، داریم: $a = ۱$ یا $a = p$

مثال:

اگر $a \mid ۹k+۷$ و $a \mid ۷k+۶$ و $a \in \mathbb{N}$ باشد ثابت کنید $a = ۱$ یا $a = ۵$.

$$\left.\begin{array}{l} a \mid ۹k+۷ \xrightarrow[\times ۷]{\text{طرف راست}} a \mid ۶۳k + ۴۹ \\ a \mid ۷k+۶ \xrightarrow[\times ۹]{\text{طرف راست}} a \mid ۶۳k + ۵۴ \end{array}\right. \xrightarrow[\text{سمت‌راست}]{-} a \mid ۵ \rightarrow \begin{cases} a = ۱ \\ \text{یا} \\ a = ۵ \end{cases}$$

بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک (ب.م.م)

۱) عدد طبیعی d را ب‌م‌م دو عدد صحیح a و b می‌نامیم (a و b هر دو با هم صفر نیستند) و می‌نویسیم $(a,b)=d$، هرگاه دو شرط زیر برقرار باشند:

- $d \mid a \ , \ d \mid b$
- $\forall m > 0 \ ; \ m \mid a \ , \ m \mid b \to m \le d$

۲) اگر $a \mid b$، داریم: $(a,b)=|a|$

۳) اگر p عددی اول باشد و $a \in \mathbb{Z}$ و $p \nmid a$، داریم: $(p,a)=1$

۴) اگر p و q هر دو اول باشند و $p \neq q$ باشد، داریم: $(p,q)=1$

۵) هر دو عدد صحیح و متوالی نسبت به هم اول هستند. ببینید:

$$(m,m+1)=d \to \begin{cases} d \mid m \\ d \mid m+1 \end{cases} \xrightarrow[\text{سمت راست}]{-} d \mid 1 \to d=1$$

۶) دو عدد صحیح و فرد متوالی نسبت به هم اول هستند. ببینید:

$$(2n-1,2n+1)=d \to \begin{cases} d \mid 2n-1 \\ d \mid 2n+1 \end{cases} \xrightarrow[\text{سمت راست}]{-} d \mid 2 \to d=1 \text{ یا } d=2$$

از طرفی چون $2n+1$ (یا $2n-1$) عددی فرد است و یک عدد زوج نمی‌تواند یک عدد فرد را بشمارد $2 \nmid 2n+1$ بنابراین $d=2$ غیرقابل قبول است.

مثال:

m عددی صحیح است حاصل $(2m,6m^3)$ را بیابید:

$$2m \mid 6m^3 \to (2m,6m^3)=|2m|$$

کوچک‌ترین مضرب مشترک (ک.م.م)

۱) عدد طبیعی c را ک‌م‌م دو عدد صحیح و ناصفر a و b می‌نامیم و می‌نویسیم $[a,b]=c$، هرگاه دو شرط زیر برقرار باشند:

- $a \mid c \ , \ b \mid c$
- $\forall m > 0 \ ; a \mid m \ , \ b \mid m \to c \le m$

۲) اگر $a \mid b$ داریم: $[a,b]=|b|$

مثال:

حاصل موارد زیر را به دست آورید: $(m \in \mathbb{Z})$

- $([m^2,m],m^5)$

چون $m \mid m^2$، داریم:

$$[m^2,m]=|m^2|=m^2$$

حال باید حاصل (m^2,m^5) را به دست بیاوریم. می‌دانیم که $m^2 \mid m^5$ پس:

$$(m^2,m^5)=|m^2|=m^2$$

- $[m^7,(m^2,m^3)]$

چون $m^2 \mid m^3$، در نتیجه:

$$(m^2,m^3)=|m^2|=m^2$$

حال باید حاصل $[m^7,m^2]$ را بیابیم. می‌دانیم که $m^2 \mid m^7$ پس:

$$[m^7,m^2]=|m^7|$$

نکته:

برای هر عدد طبیعی مانند m و هر دو عدد صحیح مانند a و b، اگر $m \mid a-b$ ، می‌گوییم « a به پیمانه m با b هم‌نهشت است» و می‌نویسیم $a \overset{m}{\equiv} b$ که این تعریف به زبان ریاضی عبارت است از:

$$\forall a,b \in \mathbb{Z}\ ,\ a \overset{m}{\equiv} b \Leftrightarrow m \mid a-b\ ,\ (m \in \mathbb{N})$$

توجه: مجموعه همه اعداد صحیحی که باقی‌مانده تقسیم آن‌ها بر عدد طبیعی m برابر با r می‌باشد را کلاس یا دسته هم‌نهشتی r به پیمانه m می‌گوییم و با نماد $[r]_m$ نمایش می‌دهیم.

$$[r]_m = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = mk + r\}$$

ویژگی‌های رابطه هم‌نهشتی:

- $a \overset{m}{\equiv} b \to a \pm c \overset{m}{\equiv} b \pm c$
- $a \overset{m}{\equiv} b \to ac \overset{m}{\equiv} bc$
- $a \overset{m}{\equiv} b \to a^n \overset{m}{\equiv} b^n\ ;\ (n \in \mathbb{N})$
- $\begin{cases} a \overset{m}{\equiv} b \\ c \overset{m}{\equiv} d \end{cases} \to \begin{cases} ac \overset{m}{\equiv} bd \\ a+c \overset{m}{\equiv} b+d \\ a-c \overset{m}{\equiv} b-d \end{cases}$
- $a \overset{m}{\equiv} b\ ,\ b \overset{m}{\equiv} c \to a \overset{m}{\equiv} c$
- $a \overset{m}{\equiv} b \to a \pm mt \overset{m}{\equiv} b \pm mk$
- $ac \overset{m}{\equiv} bc \xrightarrow{(c,m)=d} a \overset{\frac{m}{d}}{\equiv} b \xrightarrow{\text{نتیجه}} ac \overset{m}{\equiv} bc \xrightarrow{(c,m)=1} a \overset{m}{\equiv} b$
- $a \overset{m}{\equiv} b \xrightarrow{n \mid m} a \overset{n}{\equiv} b$
- $a \overset{m}{\equiv} b\ ,\ b \overset{n}{\equiv} c \xrightarrow{(m,n)=d} a \overset{d}{\equiv} c$

توجه: اگر باقی‌مانده تقسیم a بر m برابر r باشد در این صورت داریم، $a \overset{m}{\equiv} r$ به عبارت دیگر:

$$a = mq + r \Leftrightarrow a \overset{m}{\equiv} r$$

توجه: هرگاه دو عدد a و b در تقسیم بر عدد طبیعی m ، هم‌باقی‌مانده باشند، داریم: $a \overset{m}{\equiv} b$

مثال:

باقی‌مانده تقسیم عدد $k = (۲۷)^۷ + ۱۹$ را بر ۱۳ بیابید:

$$۲۷ = (۱۳ \times ۲) + ۱ \to ۲۷ \overset{۱۳}{\equiv} ۱ \xrightarrow[\text{به توان ۷}]{\text{طرفین}} (۲۷)^۷ \overset{۱۳}{\equiv} ۱^۷ = ۱ \qquad (A)$$

$$۱۹ = (۱۳ \times ۱) + ۶ \to ۱۹ \overset{۱۳}{\equiv} ۶ \qquad (B)$$

طرفین روابط A و B را جمع می‌کنیم:

$$\underbrace{(۲۷)^۷ + ۱۹}_{k} \overset{۱۳}{\equiv} ۶ + ۱ \to k \overset{۱۳}{\equiv} ۷ \to r = ۷$$

مثال:

باقی‌مانده تقسیم عدد $A=(۱۰۰۰)^{۲۵}\times ۹+۱۱$ را بر ۷ بیابید:

$$۱۰۰۰=(۱۴۲\times ۷)+۶ \rightarrow ۱۰۰۰\overset{۷}{\equiv}۶\overset{۷}{\equiv}-۱ \rightarrow ۱۰۰۰\overset{۷}{\equiv}-۱ \xrightarrow[\text{به توان ۲۵}]{\text{طرفین}} (۱۰۰۰)^{۲۵}\overset{۷}{\equiv}(-۱)^{۲۵}=-۱$$

$$\xrightarrow[\times ۹]{\text{طرفین}} (۱۰۰۰)^{۲۵}\times ۹\overset{۷}{\equiv}-۹ \xrightarrow[+۱۱]{\text{طرفین}} (۱۰۰۰)^{۲۵}\times ۹+۱۱\overset{۷}{\equiv}۲ \rightarrow r=۲$$

نکته:

عدد n رقمی $A=\overline{a_n a_{n-۱} a_{n-۲} a_{n-۳}\cdots a_۲ a_۱ a_۰}$ را در نظر بگیرید:

۱) این عدد را می‌توان به صورت مقابل بسط داد:

$$A=a_۰+۱۰a_۱+۱۰^{۲}a_۲+\cdots+۱۰^{n}a_n$$

۲) باقی‌مانده تقسیم این عدد بر ۳ یا ۹ با باقی‌مانده تقسیم **مجموع ارقام آن عدد** بر ۳ یا ۹ برابر است.

$$A\overset{۹}{\equiv}a_n+a_{n-۱}+\cdots+a_۲+a_۱+a_۰\overset{۹}{\equiv}\cdots$$

۳) برای به دست آوردن باقی‌مانده تقسیم این عدد بر ۱۱، از سمت راست عدد، ارقام را به صورت یک در میان با هم جمع و تفریق می‌کنیم و باقی‌مانده عدد به دست آمده را بر ۱۱ به دست می‌آوریم.

$$A\overset{۱۱}{\equiv}a_۰-a_۱+a_۲-a_۳+\cdots+(-۱)^{n}a_n\overset{۱۱}{\equiv}\cdots$$

۴) باقی‌مانده تقسیم این عدد بر ۱۰ یا ۲ یا ۵ با باقی‌مانده تقسیم **رقم سمت راست آن عدد** بر ۱۰ یا ۲ یا ۵، برابر است.

$$A\overset{۱۰}{\equiv}a_۰\overset{۱۰}{\equiv}\cdots$$

$$A\overset{۲}{\equiv}a_۰\overset{۲}{\equiv}\cdots$$

$$A\overset{۵}{\equiv}a_۰\overset{۵}{\equiv}\cdots$$

مثال:

باقی‌مانده تقسیم عدد $A=۱۳۷۰۰۴۰۵$ را بر عدد ۹ بیابید:

$$۱۳۷۰۰۴۰۵\overset{۹}{\equiv}۱+۳+۷+۰+۰+۴+۰+۵\overset{۹}{\equiv}۲۰\overset{۹}{\equiv}۲ \rightarrow r=۲$$

باقی‌مانده تقسیم عدد فوق بر ۱۱ را بیابید:

$$۱۳۷۰۰۴۰۵\overset{۱۱}{\equiv}۵-۰+۴-۰+۰-۷+۳-۱\overset{۱۱}{\equiv}۴ \rightarrow r=۴$$

باقی‌مانده تقسیم عدد فوق بر ۲ را بیابید:

$$۱۳۷۰۰۴۰۵\overset{۲}{\equiv}\underbrace{۱۳۷۰۰۴۰۰}_{\text{بزار کنار}}+۵\overset{۲}{\equiv}۱ \rightarrow r=۱$$

مثال:

باقی‌مانده تقسیم عدد $۱!+۲!+۳!+\cdots+۵۰۰!$ را بر ۱۰ به دست آورید.

$$۱!\overset{۱۰}{\equiv}۱\ ,\ ۲!\overset{۱۰}{\equiv}۲\ ,\ ۳!=۶\overset{۱۰}{\equiv}۶$$

$$۴!=۲۴\overset{۱۰}{\equiv}۴$$

$$۵!=۱۲۰\overset{۱۰}{\equiv}۰$$

$$۶!=۷۲۰\overset{۱۰}{\equiv}۰$$

$$\vdots$$

$$۵۰۰!\overset{۱۰}{\equiv}۰$$

همان‌طور که می‌بینید از !۵ به بعد رقم یکان اعداد برابر صفر می‌شود بنابراین:

$$1!+2!+3!+\cdots+50! \overset{10}{\equiv} 1+2+6+4+0+\ldots\ldots+0 \overset{10}{\equiv} 13 \overset{10}{\equiv} 3 \to r=3$$

توجه: اگر در سؤالی درباره رقم یکان یک عدد پرسیدند کافی است که باقی‌مانده تقسیم آن عدد بر ۱۰ را به دست بیاوریم.

مثال:

رقم یکان عدد $(7+2^{11})$ را به دست آورید.

$$2^{10}=1024 \to 2^{10} \overset{10}{\equiv} 4 \xrightarrow[\times 2]{\text{طرفین}} 2^{11} \overset{10}{\equiv} 8 \xrightarrow[+7]{\text{طرفین}} 2^{11}+7 \overset{10}{\equiv} 15 \overset{10}{\equiv} 5$$

قضیه تقسیم:

اگر a عددی صحیح و b عددی طبیعی باشد در این صورت اعدادی صحیح و منحصر به فرد مانند q و r یافت می‌شوند به طوری که:

$$a=bq+r \ ; \ 0 \le r < b$$

مثال:

اگر باقی‌مانده تقسیم عدد a بر ۴ برابر ۳ باشد در این صورت باقی‌مانده تقسیم عدد $(2a+3)$ بر ۸ را به دست آورید:

$$a=4q+3 \xrightarrow{\times 2} 2a=8q+6 \xrightarrow{+3} 2a+3=8q+9$$

$$\to 2a+3=8(q+1)+1=8q'+1 \to \text{باقی‌مانده}=r=1$$

مثال:

اگر در تقسیم، مقسوم و مقسوم‌علیه، هر دو بر عدد صحیح n بخش‌پذیر باشند، ثابت کنید باقی‌مانده تقسیم نیز همواره بر n بخش‌پذیر است.

$$a=bq+r \ ; \ 0 \le r < b \to a-bq=r$$

می‌دانیم که a، مقسوم و b مقسوم‌علیه است لذا طبق اطلاعات سؤال:

$$\begin{cases} n \mid a \\ n \mid b \xrightarrow[\text{سمت راست}]{\times q} n \mid bq \end{cases} \to \begin{cases} n \mid a \\ n \mid bq \end{cases} \xrightarrow{(-)} n \mid \underbrace{a-bq}_{r} \to n \mid r$$

افراز مجموعه $\mathbb{Z}$ به کمک قضیه تقسیم

با توجه به قضیه تقسیم می‌دانیم که اگر a عددی صحیح و دلخواه باشد با تقسیم آن بر عدد طبیعی b، با توجه به اینکه باقی‌مانده تقسیم یعنی r در رابطه $0 \le r < b$ صدق می‌کند، برای a برحسب r دقیقاً b حالت وجود دارد.

مثلاً در تقسیم a بر عدد طبیعی ۴، داریم:

$$a=4q+r \ , \ r=0 \text{ یا } 1 \text{ یا } 2 \text{ یا } 3 \to \begin{cases} a=4q \\ a=4q+1 \\ a=4q+2 \\ a=4q+3 \end{cases}$$

توجه ۱: اگر $p>3$ عددی اول باشد آن‌گاه به یکی از دو صورت $p=6k+1$ یا $p=6k+5$ نوشته می‌شود.

توجه ۲: هر عدد صحیح و فرد مانند a، به یکی از دو صورت $a=4k+1$ یا $a=4k+3$ نوشته می‌شود.

توجه ۳: مربع هر عدد فرد به صورت $(8t+1)$ نوشته می‌شود.

مثال:

ثابت کنید اگر $p \ge 5$ عددی اول باشد آن‌گاه به یکی از دو صورت $p=4k+1$ یا $p=4k+3$ نوشته می‌شود.

$$p=4k \ , \ p=4k+1 \ , \ p=4k+2 \ , \ p=4k+3$$

در حالت $p=4k$ و $p=4k+2=2(2k+1)$، p عددی زوج است که با اول بودن آن تناقض دارد. بنابراین اعداد اول به فرم $p=4k+3$ یا $p=4k+1$ خواهند بود.

مثال:

اگر a عددی صحیح و فرد باشد که $b \mid a+2$، باقی‌مانده تقسیم عدد (a^2+b^2+3) را بر ۸ به دست آورید.

a عددی فرد است بنابراین $a+2$ عددی فرد است و چون $b \mid a+2$، بنابراین b نیز عددی فرد خواهد بود. از طرفی می‌دانیم که مربع هر عدد فرد به صورت $(8t+1)$ است پس:

$$a^2+b^2+3=(8t+1)+(8t'+1)+3=8(t+t')+5=8t''+5 \rightarrow r=5$$

مثال:

اگر a عددی صحیح و دلخواه باشد ثابت کنید همواره یکی از اعداد صحیح a یا $a+2$ یا $a+4$ بر ۳ بخش‌پذیر است.

$$a=3k$$

$$a=3k+1 \xrightarrow{+2} a+2=3k+3 \rightarrow a+2=3(k+1)=3k'$$

$$a=3k+2 \xrightarrow{+4} a+4=3k+6 \rightarrow a+4=3(k+2)=3k''$$

یک رابطه هم‌نهشتی به همراه مجهولی مانند x به فرم $ax \overset{m}{\equiv} b$ را یک معادله هم‌نهشتی می‌گوییم و منظور از حل معادله هم‌نهشتی پیدا کردن همه جواب‌هایی چون $x_\circ \in \mathbb{Z}$ است که در این معادله صدق می‌کند.

قضیه: معادله هم‌نهشتی $ax \overset{m}{\equiv} b$ دارای جواب است اگر و تنها اگر $(a,m) \mid b$

نتیجه قضیه: در معادله هم‌نهشتی $ax \overset{m}{\equiv} b$، اگر $(a,m)=1$ باشد، معادله همواره دارای جواب است.

توجه: اگر در معادله هم‌نهشتی ضریب x عددی غیر از یک باشد برای رسیدن به جواب‌های عمومی معادله ابتدا باید به کمک ویژگی‌های هم‌نهشتی ضریب x را حذف کنیم.

مثال:

آیا معادله $4x \overset{6}{\equiv} 13$ دارای جواب است؟ دلیل بیاورید.

خیر. زیرا $(4,6)=2$, $2 \nmid 13$

مثال:

معادله هم‌نهشتی $3x \overset{7}{\equiv} 13$ را حل کرده و جواب عمومی آن را به دست آورید.

$$\begin{cases} 3x \overset{7}{\equiv} 13 \\ 13 \overset{7}{\equiv} 6 \end{cases} \rightarrow 3x \overset{7}{\equiv} 6 \xrightarrow{(3,7)=1} x \overset{7}{\equiv} 2 \rightarrow x=7k+2$$

معادله سیاله:

به معادله $ax+by=c \ ; \ (a,b,c \in \mathbb{Z})$ معادله سیاله درجه اول (خطی) می‌گوییم هرگاه جواب‌های این معادله (یعنی x و y) در اعداد صحیح باشند.

توجه: شرط لازم و کافی برای اینکه معادله سیاله $ax+by=c$ جواب داشته باشد این است که: $(a,b) \mid c$

مثال:

آیا معادله سیاله $4x+6y=9$ جواب صحیح دارد؟ دلیل بیاورید.

خیر. زیرا $(4,6)=2$, $2 \nmid 9$

حل معادله سیاله با تبدیل آن به معادله هم‌نهشتی:

- ابتدا معادله سیاله را به یکی از دو صورت زیر تبدیل به معادله هم‌نهشتی می‌کنیم.

$$ax+by=c \rightarrow \begin{cases} ax \overset{|b|}{\equiv} c \\ by \overset{|a|}{\equiv} c \end{cases}$$

- سپس معادله هم‌نهشتی موردنظر را حل کرده و جواب به دست آمده را در معادله سیاله قرار داده و با حل آن جواب دیگر را به دست می‌آوریم.

مثال:

معادله سیاله $۵x+۲y=۱۸$ را حل کنید و جواب‌های عمومی آن را بیابید.

$$۵x+۲y=۱۸ \rightarrow ۲y \overset{۵}{\equiv} ۱۸ \xrightarrow{(۲,۵)=۱} y \overset{۵}{\equiv} ۹ \overset{۵}{\equiv} ۴ \rightarrow y=۵k+۴$$

حال $y=۵k+۴$ را در معادله سیاله به جای y قرار می‌دهیم:

$$۵x+۲(۵k+۴)=۱۸ \rightarrow ۵x+۱۰k+۸=۱۸ \rightarrow ۵x=-۱۰k+۱۰$$

$$\rightarrow ۵x=۵(-۲k+۲) \rightarrow x=-۲k+۲$$

مثال:

به چند طریق می‌توان یک کیسه ۲۳ کیلویی را با وزنه‌های ۳ و ۵ کیلویی وزن کرد؟

$$\begin{cases} x = \text{تعداد وزنه‌های ۳ کیلویی} \\ y = \text{تعداد وزنه‌های ۵ کیلویی} \end{cases}$$

فقط دقت کنید که چون x و y تعداد وزنه‌ها را نشان می‌دهند بنابراین x و y اعدادی صحیح و نامنفی هستند $(x,y \in W)$

لذا باید تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله سیاله $۳x+۵y=۲۳$ را پیدا کنیم.

$$۳x+۵y=۲۳ \rightarrow ۳x \overset{۵}{\equiv} ۲۳ \rightarrow ۳x \overset{۵}{\equiv} (۵\times۴)+۳ \rightarrow ۳x \overset{۵}{\equiv} ۳$$

$$\xrightarrow{(۳,۵)=۱} x \overset{۵}{\equiv} ۱ \rightarrow x=۵k+۱$$

حال $x=۵k+۱$ را در معادله سیاله قرار می‌دهیم:

$$۳(۵k+۱)+۵y=۲۳ \rightarrow ۱۵k+۳+۵y=۲۳ \rightarrow ۵y=-۱۵k+۲۰ \rightarrow y=-۳k+۴$$

می‌دانیم که y و x باید صحیح و نامنفی باشند، پس:

$$\begin{cases} x \geq ۰ \rightarrow ۵k+۱ \geq ۰ \rightarrow k \geq -\frac{۱}{۵} \\ y \geq ۰ \rightarrow -۳k+۴ \geq ۰ \rightarrow k \leq \frac{۴}{۳} \end{cases} \xrightarrow[(k\in\mathbb{Z})]{\text{اشتراک}} \begin{cases} k=۰ \\ k=۱ \end{cases}$$

بنابراین دو روش برای انجام این کار وجود دارد.

$$k=۰ \rightarrow \begin{cases} x=۱ \\ y=۴ \end{cases} \rightarrow \text{(یک وزنه ۳ کیلویی و ۴ وزنه ۵ کیلویی)}$$

$$k=۱ \rightarrow \begin{cases} x=۶ \\ y=۱ \end{cases} \rightarrow \text{(۶ وزنه ۳ کیلویی و یک وزنه ۵ کیلویی)}$$

خلاصه نکات فصل دوم

نکته‌های مهم:

نکته ۱:

- به گرافی که برای یال‌های آن تعیین جهت شده باشد **گراف جهت‌دار** می‌گوییم.
- تعداد رأس‌های گراف G را **مرتبه گراف** G می‌گوییم و آن را با $P(G)$ یا $|V(G)|$ نشان می‌دهیم.
- تعداد یال‌های گراف G را **اندازه گراف** G می‌گوییم و آن را با $q(G)$ یا $|E(G)|$ نشان می‌دهیم.
- به تعداد یال‌هایی که به رأس v در گراف G متصل هستند **درجهٔ رأس** v گوییم و آن را با $\deg(v)$ یا $d(v)$ نشان می‌دهیم.
- اگر درجه یک رأس فرد باشد آن را **رأس فرد** و اگر درجه یک رأس زوج باشد آن را **رأس زوج** می‌گوییم.
- به رأسی که درجه آن صفر باشد (هیچ یالی به آن متصل نباشد)، **رأس تنها** (یا رأس ایزوله) می‌گوییم.
- گرافی را که تمام رئوس آن رأس تنها باشند (هیچ یالی نداشته باشد) **گراف تهی** می‌گوییم.
- گرافی که درجه تمام رأس‌های آن با هم مساوی و برابر عدد K باشد، **گراف** $K-$**منتظم** می‌گوییم.

توجه: گراف فرد ـ منتظم از مرتبه فرد وجود ندارد.

- به یالی که یک رأس را به خود آن رأس وصل کند **طوقه** گفته می‌شود.

گراف ساده گرافی است که
- طوقه ندارد.
- یال جهت‌دار ندارد.
- بین هر دو رأس آن **حداکثر** یک یال وجود داشته باشد.

- دو رأس u و v را **دو رأس همسایه یا مجاور** می‌گوییم که توسط یالی به هم وصل شده باشند.
- به مجموعه رأس‌هایی از گراف G که به رأس v متصل هستند، **همسایگی باز رأس** v می‌گوییم و آن را با $N_G(v)$ نشان می‌دهیم. حال اگر خود رأس v را نیز به این مجموعه اضافه کنیم مجموعه‌ای به دست می‌آید که به آن **همسایگی بسته رأس** v گفته و آن را با $N_G[v]$ نشان می‌دهیم.
- دو یال را **مجاور** گوییم هرگاه رأسی وجود داشته باشد که هر دوی آن‌ها به آن متصل باشند.
- بزرگ‌ترین عدد در بین درجات رئوس گراف G را **ماکزیمم درجه گراف** می‌نامیم و آن را با $\Delta(G)$ نشان می‌دهیم.
- کوچک‌ترین عدد در بین درجات رئوس گراف G را **مینیمم درجه گراف** می‌نامیم و آن را با $\delta(G)$ نشان می‌دهیم.
- یک **زیرگراف** از گراف G گرافی است که مجموعه رئوس آن زیرمجموعه‌ای از مجموعه رئوس گراف G و مجموعه یال‌های آن زیرمجموعه‌ای از مجموعه یال‌های گراف G باشد.

مکمل گراف G
- آن را با G^c یا $\overline{G}$ نشان می‌دهیم.
- مجموعه رئوس مکمل گراف G همان مجموعه رئوس گراف G است.
- اگر بین دو رأس دلخواه از گراف G یالی وجود نداشته باشد در این صورت بین همان دو رأس در گراف مکمل، یک یال وجود دارد (و بالعکس)
- اگر G یک گراف از مرتبه p و v یک رأس از آن باشد داریم: $d_G(v)+d_{\overline{G}}(v)=p-۱$
- اگر G یک گراف از مرتبه p و اندازه q باشد، داریم: $q(G)+q(\overline{G})=\dfrac{p(p-۱)}{۲}$

گراف کامل
- به گرافی که هر رأس آن با تمام رئوس دیگر مجاور باشد، گراف کامل می‌گوییم.
- گراف کامل p رأسی را با k_p نمایش می‌دهیم و می‌توان گفت که k_p یک گراف p رأسی و $(p-۱)-$منتظم است.
- تعداد یال‌های یک گراف کامل p رأسی برابر است با: $q(k_p)=\dfrac{p(p-۱)}{۲}$
- مکمل یک گراف کامل، یک گراف تهی است و بالعکس.

مسیر

اگر u و v دو رأس از گراف G باشند یک مسیر از u به v، در G دنباله‌ای از رئوس دو به دو متمایز در G است که از u شروع و به v ختم می‌شود به‌طوری که هر دو رأس متوالی این دنباله در G مجاور هم باشند.

طول یک مسیر = تعداد یال‌های موجود در آن مسیر = یکی کمتر از تعداد رأس‌های موجود در آن مسیر

دنباله متشکل از تنها یک رأس v، یک مسیر با طول صفر از رأس v به خودش است.

گرافی را که تنها از یک مسیر n رأسی تشکیل شده باشد با P_n نمایش می‌دهیم. ببین:

P_4

دور

دنباله $v_1v_2v_3\cdots v_nv_1\ ;\ (n \geq 3)$، از رئوس دوبه‌دو متمایز که در آن هر رأس با رأس بعدی مجاور است را یک دور به طول n می‌نامیم.

گرافی که تنها از یک دور n رأسی تشکیل شده باشد را با C_n نمایش می‌دهیم. ببین:

- گراف G را همبند می‌نامیم هرگاه بین هر دو رأس آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد در غیر این صورت آن را ناهمبند می‌نامیم.

نکته ۲: اگر G یک گراف با مرتبه p و اندازه q و $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ مجموعه رئوس آن باشند، آن‌گاه:

$$\sum_{i=1}^{p} \deg v_i = 2q$$

نکته ۳: تعداد رأس‌های فرد هر گراف، عددی زوج است.

نکته ۴: اگر G یک گراف ساده با مرتبه p و اندازه q باشد، آن‌گاه:

$$0 \leq q \leq \frac{p(p-1)}{2}$$

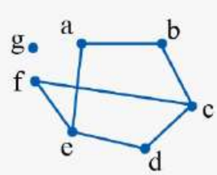
نکته ۵: در یک گراف $k-$منتظم از مرتبه p و اندازه q، داریم:

$$pk = 2q$$

مثال:

گراف G با مجموعه رأس‌های $V=\{a,b,c,d,e,f,g\}$ و مجموعه یال‌های $E=\{ab,bc,cd,ed,ae,cf,ef\}$ را در نظر بگیرید:

الف) نمودار گراف را رسم کنید:



ب) مرتبه و اندازه گراف G را مشخص کنید:

$$\begin{cases} p(G) = 7 \\ q(G) = 7 \end{cases}$$

پ) مجموع درجات رئوس این گراف برابر چند است؟

$$\sum_{i=1}^{6} \deg = 2q = 2(7) = 14$$

ت) کدام رأس‌های گراف G با رأس f مجاورند؟ e و c

ث) $\Delta(G)$ و $\delta(G)$ را مشخص کنید.

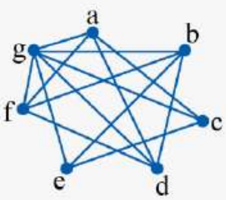
$$\begin{cases}\Delta(G)=۳\\ \delta(G)=۰\end{cases}$$

ج) یک مسیر به طول ۵ از b به d بنویسید. $baefcd$

چ) یک دور به طول ۴ مشخص کنید. $fcdef$

ح) مکمل گراف G را رسم کنید.

- بزرگ‌ترین درجه مربوط به رأس g و برابر ۶ است.



خ) $N_G[b]$ را مشخص کنید.

$$N_G[b]=\{a,b,c\}$$

د) آیا گراف G همبند است؟ خیر ـ چرا؟ چون مثلاً از g به a مسیری وجود ندارد.

ذ) با ذکر دلیل مشخص کنید که گراف مکمل چند یال دارد؟

$$q(G)+q(\overline{G})=\frac{p(p-۱)}{۲}\xrightarrow{q(G)=۷}۷+q(\overline{G})=\frac{۷(۶)}{۲}\rightarrow q(\overline{G})=۲۱-۷=۱۴$$

مثال:

یک گراف کامل ۸ رأسی چند یال دارد؟

$$q(k_۸)=\frac{p(p-۱)}{۲}=\frac{۸(۷)}{۲}=۲۸$$

مثال:

در گراف G، درجه رأس v برابر ۹ است و درجه رأس v در گراف $\overline{G}$ برابر با ۱۲ است. مرتبه گراف G را مشخص کنید.

$$\begin{cases}\deg_G(v)=۹\\ \deg_{\overline{G}}(v)=۱۲\end{cases}$$

$$\deg_G(v)+\deg_{\overline{G}}(v)=p-۱\rightarrow ۹+۱۲=p-۱\rightarrow p=۲۲$$

مثال:

گراف کامل k_p دارای ۱۰ یال است. تعداد رأس‌های این گراف را به دست آورید.

$$q(k_p)=\frac{p(p-۱)}{۲}\xrightarrow{q=۱۰}۱۰=\frac{p(p-۱)}{۲}\rightarrow p(p-۱)=۲۰\xrightarrow{p>۰}p=۵$$

مثال:

گراف G، ۳ـ منتظم است و اندازه آن ۳ واحد کمتر از ۲ برابر تعداد رأس‌های گراف است. مرتبه گراف را به دست آورید.

$$q=۲p-۳$$

از طرفی: $pk=۲q\xrightarrow{k=۳}۳p=۲q\rightarrow q=\frac{۳}{۲}p$

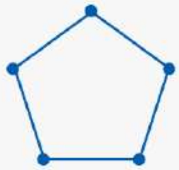
$$\rightarrow\frac{۳}{۲}p=۲p-۳\rightarrow\frac{p}{۲}=۳\rightarrow p=۶$$

مثال:

یک گراف ۵ رأسیِ غیرتهیِ kـ منتظم رسم کنید به طوری که:

الف) k بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.

ب) k کمترین مقدار ممکن را داشته باشد.



توجه کنید که گراف فردـ منتظم از مرتبه فرد وجود ندارد.

نکته‌های مهم:

نکته ۱: زیرمجموعه D از مجموعه رئوس گراف G را **مجموعه احاطه‌گر** می‌نامیم هرگاه هر رأس از گراف یا در D باشد و یا حداقل با یکی از رئوس D مجاور باشد.

نکته ۲: در بین تمام مجموعه‌های احاطه‌گر یک گراف، مجموعه‌ای را که کمترین تعداد عضو را داشته باشد، **مجموعه احاطه‌گر مینیمم** آن گراف می‌نامیم و تعداد اعضای چنین مجموعه‌ای را **عدد احاطه‌گری** گراف G می‌نامیم و آن را با $\gamma(G)$ نمایش می‌دهیم.

توجه: گاهی اوقات برای راحتی به یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم از گراف G، یک $\gamma-$ مجموعه می‌گوییم.

نکته ۳: یک مجموعه احاطه‌گر را که با حذف هر یک از رأس‌هایش دیگر احاطه‌گر نباشد، **احاطه‌گر مینیمال** می‌نامیم.

نکته ۴: اگر G یک گراف n رأسی با ماکزیمم درجه Δ باشد در این صورت:

$$\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$$

توجه: در گراف‌های C_n و P_n ، داریم:

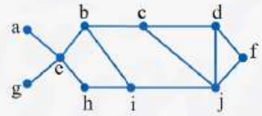
$$\gamma(G) = \left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$$

نکته ۵: هر مجموعه احاطه‌گر مینیمم یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال نیز هست ولی عکس آن لزوماً درست نیست.

نکته ۶: در گراف کامل، عدد احاطه‌گری برابر ۱ است.

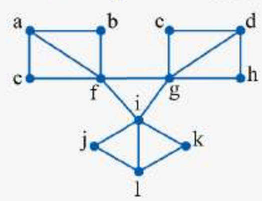
مثال:

عدد احاطه‌گری گراف‌های زیر را به دست آورید.



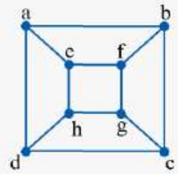
$$\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil \rightarrow \gamma(G) \geq \left\lceil \frac{10}{4+1} \right\rceil \rightarrow \gamma(G) \geq 2$$

از طرفی مجموعه $D=\{e,j\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم است بنابراین $\gamma(G) \leq 2$ است لذا: $\gamma(G) = 2$



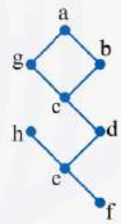
$$\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil \rightarrow \gamma(G) \geq \left\lceil \frac{12}{5+1} \right\rceil \rightarrow \gamma(G) \geq 2$$

با دو رأس نمی‌توان گراف فوق را احاطه کرد از طرفی مجموعه $D=\{f,g,i\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم برای گراف است پس $\gamma(G)=۳$



$$\gamma(G)\ge\left\lceil\frac{n}{\Delta+۱}\right\rceil\to\gamma(G)\ge\left\lceil\frac{۸}{۳+۱}\right\rceil\to\gamma(G)\ge۲$$

بنابراین حداقل عدد احاطه‌گری برابر ۲ است از طرفی مجموعه $D=\{e,c\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم برای گراف است پس $\gamma(G)\le۲$ است در نتیجه $\gamma(G)=۲$



$$\gamma(G)\ge\left\lceil\frac{۸}{۳+۱}\right\rceil\to\gamma(G)\ge۲$$

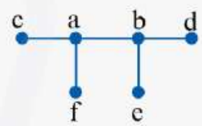
اما با دو رأس نمی‌توان تمام رأس‌های گراف را احاطه کرد از طرفی مجموعه $D=\{e,c,a\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم است پس $\gamma(G)=۳$

مثال:

گرافی ۶ رأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید به‌طوری که:

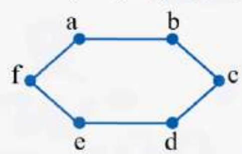
الف) مجموعه احاطه‌گر یکتا با اندازه ۲ داشته باشد.

گراف مقابل تنها یک مجموعه احاطه‌گر $\{a,b\}$ را دارد.



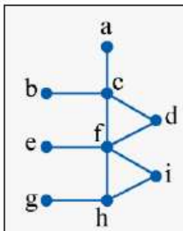
ب) بیش از یک مجموعه احاطه‌گر با اندازه ۲ داشته باشد.

گراف مقابل سه مجموعه احاطه‌گر با اندازه ۲ دارد که عبارتند از: $\{e,b\}$، $\{f,c\}$ و $\{a,d\}$



مثال:

در گراف مقابل:



الف) یک مجموعه احاطه‌گر با ۴ عضو مشخص کنید:

مانند: $D=\{c,f,h,g\}$

ب) یک $\gamma-$ مجموعه مشخص کنید:

مانند: $D=\{h,c,e\}$

پ) یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال ۳ عضوی و یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال ۴ عضوی مشخص کنید:

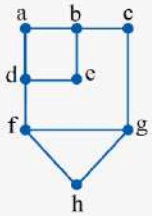
مانند: $D=\{c,f,g\}$

مانند: $D=\{g,c,i,e\}$

در این مثال اگر مجموعه‌های دیگری با ویژگی مشابه بنویسید به شما نمره تعلق می‌گیرد.

مثال:

در گراف شکل زیر یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال مشخص کنید که مینیمم نباشد.



مانند: $D=\{a,e,c,h\}$

برای مجموعه‌های دیگر با ویژگی مشابه، نمره تعلق می‌گیرد.

مثال:

یک گراف ۶ رأسی که $\gamma-$مجموعه آن با اندازه یک باشد، رسم کنید:

خلاصه نکات فصل سوم

نکته‌های مهم:

نکته ۱: تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز برابر است با: $n!$

مثال: به چند طریق می‌توان ۵ نفر را در یک ردیف کنار هم قرار داد؟ $5!$

نکته ۲: اگر در محاسبه جایگشت n شیء متمایز بخواهیم که چندشیء کنار هم باشند به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

۱) ابتدا اشیایی که قرار است کنار هم باشند را در یک دسته قرار داده و جایگشت اشیاء درون دسته را حساب می‌کنیم.

۲) سپس آن دسته را در کنار سایر اشیای باقی‌مانده قرار داده و جایگشت آن‌ها را نیز به‌دست می‌آوریم.

۳) در نهایت اعداد به‌دست آمده در مراحل ۱ و ۲ را در هم **ضرب** می‌کنیم.

مثال:

۴ کتاب فیزیک متفاوت و ۵ کتاب ریاضی متفاوت را به چند طریق می‌توان در یک قفسه و در یک ردیف کنار هم قرار داد به‌طوری که همواره کتاب‌های فیزیک کنار هم باشند؟

$\boxed{FFFF}$ RRRRR

جایگشت درون دسته: $4!$

جایگشت بقیه کتاب‌ها + دسته: $6!$

$\Rightarrow$ جایگشت کل $= 4! \times 6!$

نکته:

اگر در محاسبه جایگشت n شیء متمایز بخواهیم که چند شیء در جای مخصوصی قرار بگیرند، در این‌صورت ابتدا آن اشیاء را در جای مشخص شده فیکس می‌کنیم سپس جایگشت سایر اشیای باقی‌مانده را محاسبه می‌کنیم.

مثال:

حروف کلمه BIOMAZE را با جایگشت‌های مختلف کنار هم قرار می‌دهیم. با این حروف چند کلمه ۷ حرفی (بدون توجه به معنی) می‌توان نوشت به‌طوری که با حرف A شروع شود و به حرف Z ختم شوند.

A _ _ _ _ _ Z

جایگشت کل = جایگشت حروف باقی‌مانده $= 5!$

نکته:

اگر اعضای یک گروه با m شیء متمایز با اعضای یک گروه دیگر با n شیء متمایز بخواهند در یک ردیف و به‌صورت یک در میان قرار بگیرند، داریم:

اگر تعداد اعضای دو گروه باهم برابر باشند $(m=n)$، در این‌صورت تعداد جایگشت‌های مطلوب برابر است با: $2 \times m! \times n!$

اگر تعداد اعضای دو گروه باهم یک واحد اختلاف داشته باشند در این‌صورت تعداد جایگشت‌های مطلوب برابر است با: $m! \times n!$

مثال:

۶ کتاب متفاوت تاریخ و ۵ کتاب متفاوت ادبیات را به چند طریق می‌توان در یک ردیف کنار هم قرار داد به‌طوری که به‌صورت یک در میان قرار بگیرند.

چون تعداد اعضای آن‌ها یک واحد باهم اختلاف دارند بنابراین تعداد جایگشت‌های مطلوب برابر است با: $6! \times 5!$

نکته:

اگر n شیء مفروض باشند، به‌طوری که n_1 تای آن‌ها از نوع اول و یکسان و n_2 تای آن‌ها از نوع دوم و یکسان و ... و n_k تای آن‌ها از نوع k اُم و یکسان باشند، در این‌صورت تعداد کل جایگشت‌های این اشیاء برابر است با:

$$\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \cdots \times n_k!}$$ (جایگشت با تکرار)

مثال:

با ارقام ۵، ۴، ۴، ۲، ۳، ۲، ۲، ۱ و ۱ چند عدد ۹ رقمی می‌توان نوشت؟

$$\frac{۹!}{۲!\times ۳!\times ۲!}$$

تعداد ۱ها — تعداد ۲ها — تعداد ۴ها

مثال:

به چند طریق می‌توان ۹ نفر را در سه اتاق ۲ نفره، ۳ نفره و ۴ نفره واقع در یک هتل اسکان داد؟

$$\frac{۹!}{۲!\times ۳!\times ۴!}$$

مثال:

۷ نفر به چند طریق می‌توانند در دو اتاق دو نفره و یک اتاق سه نفره قرار بگیرند؟

$$\frac{۷!}{۲!\times ۲!\times ۳!}$$

حالا اگه تو سؤال بگه که «اتاق‌ها یکسانند» باید حاصل بالا رو بر !۲ تقسیم کنیم. چرا؟ چون دو تا اتاق ۲ نفره داریم!

مثال:

می‌خواهیم ۲۰ نفر را به ۴ گروه ۵ نفره تقسیم کنیم. به چند طریق این کار امکان‌پذیر است؟

$$\frac{۲۰!}{۵!\times ۵!\times ۵!\times ۵!\times ۴!}$$

$\downarrow$ چون ۴ گروه با ظرفیت یکسان داریم.

مثال:

فرض کنید می‌خواهیم با حروف «ب» و «ج» و ارقام ۸، ۶، ۵، ۴، ۲، ۱ رمزی شامل ۸ کاراکتر تشکیل دهیم، مطلوبست:

الف) تعداد رمزهایی که هریک از آن‌ها با یک حرف آغاز و با حرف دیگر خاتمه یابد:

ب _ _ _ _ _ _ ج $\to ۶!$

یا $\to ۶!\times ۲$

ج _ _ _ _ _ _ ب $\to ۶!$

ب) تعداد رمزهایی که در آن‌ها حروف کنار هم باشند:

$\boxed{\text{ج ب}}$, ۱ , ۲ , ۴ , ۵ , ۶ , ۸

!۲ = جایگشت بسته

!۷ = جایگشت بقیه + بسته $\longrightarrow$ جایگشت کل $= ۷!\times ۲!$

ج) تعداد رمزهایی که در آن حروف کنار هم و ارقام کنار هم باشند:

$\boxed{\text{ج ب}}$, $\boxed{۱ , ۲ , ۴ , ۵ , ۶ , ۸}$ جایگشت کل $= ۶!\times ۲!\times ۲!$

$\downarrow ۲!$ $\quad \downarrow ۶!$

!۲ - جایگشت دو بسته با هم

د) تعداد کل رمزهایی که می‌توان ساخت: !۸

مثال:

اگر داشته باشیم $A=\{1,2,3,4\}$ و $B=\{5,6,7,8,9\}$، در این‌صورت چند کد یا رمز ۵ رقمی می‌توان نوشت که هریک شامل دو رقم (متمایز) از A و سه رقم (متمایز) از B باشد؟

$$\underbrace{\binom{4}{2}}_{\text{انتخاب ۲ رقم از A}}\times\overbrace{\binom{5}{3}}^{\text{انتخاب ۳ رقم از B}}\times\underbrace{5!}_{\text{جایگشت ۵ رقم باهم}}=7200$$

مثال:

با حروف کلمه جیرجیرک چند کلمه ۷ حرفی می‌توان نوشت؟

$$\frac{7!}{\underbrace{2!}_{\text{دو حرف "ج"}}\times\underbrace{2!}_{\text{دو حرف "ر"}}\times\underbrace{2!}_{\text{دو حرف "ی"}}}$$

نکته‌های مهم:

نکته ۱: تعداد جواب‌های **صحیح و نامنفی** معادله $x_1+x_2+\cdots+x_k=n$ برابر است با: $\binom{n+k-1}{k-1}$

نکته ۲: تعداد جواب‌های **صحیح و مثبت (تعداد جواب‌های طبیعی)** معادله $x_1+x_2+\cdots+x_k=n$ برابر است با: $\binom{n-1}{k-1}$

مثال:

تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_1+x_2+x_3+x_4=9$ را بیابید.

$$\begin{cases}n=9\\k=4\end{cases}\Rightarrow \text{تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی}=\binom{9+4-1}{4-1}=\binom{12}{3}=\frac{12\times11\times10}{3\times2\times1}=220$$

مثال:

تعداد جواب‌های صحیح و مثبت معادله $x_1+x_2+x_3=7$ را بیابید.

$$\begin{cases}n=7\\k=3\end{cases}\Rightarrow \text{تعداد جواب‌های صحیح و مثبت}=\binom{n-1}{k-1}=\binom{7-1}{3-1}=\binom{6}{2}=\frac{6\times5}{2\times1}=15$$

نکته:

اگر متغیرهای معادله دارای شرط بودند چکار کنیم؟

برای پیدا کردن تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_1+x_2+\cdots+x_k=n$، با شرط $x_1\ge a$ و $x_2\ge b$ و $x_3\ge c$ و ... و $x_k\ge m$، به‌صورت زیر عمل می‌کنیم.

۱) ابتدا اعداد موجود در سمت راست هریک از شروط را به سمت چپ منتقل کرده و هر شرط را به‌صورت $x_i-\bigcirc\ge0$ تبدیل می‌کنیم.

۲) سپس عبارت $(x_i-\bigcirc)$ را با متغیر y_i برابر قرار داده و از آن‌جا x_i را تنها می‌کنیم.

۳) در نهایت x_i به‌دست آمده را در معادله اصلی جایگذاری کرده و معادله را حل می‌کنیم.

توجه: اگر شرط مسئله به‌صورت $x_i>a$ باشد قبل از انجام مراحل بالا ابتدا باید شرط موردنظر را به حالت تساوی تبدیل کنیم ببینید:

$$x_i>a\longrightarrow x_i\ge(a+1)$$

مثال:

معادله $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=14$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد به شرط آن‌که $x_1\ge1$ و $x_3>3$ باشند؟

$$x_1 \geq 1 \longrightarrow \underbrace{x_1 - 1}_{y_1} \geq 0 \Rightarrow y_1 = x_1 - 1 \Rightarrow x_1 = y_1 + 1 \,;\, y_1 \geq 0$$

$$x_3 > 3 \xrightarrow{\text{تبدیل به تساوی}} x_3 \geq 4 \longrightarrow \underbrace{x_3 - 4}_{y_3} \geq 0 \Rightarrow y_3 = x_3 - 4 \Rightarrow x_3 = y_3 + 4 \Rightarrow ; y_3 \geq 0$$

حال x_1 و x_3 به‌دست آمده را در معادله اصلی جایگذاری می‌کنیم:

$$(y_1+1)+x_2+(y_3+4)+x_4+x_5=14 \Rightarrow y_1+x_2+y_3+x_4+x_5=9 \Rightarrow \begin{cases} n=9 \\ k=5 \end{cases}$$

$$\text{تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی} = \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{9+5-1}{5-1} = \binom{13}{4} = \frac{13\times12\times11\times10}{4\times3\times2\times1} = 715$$

مثال:

تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=10$ با شرط $2 \leq i \leq 5$ و $x_i > 0$ را محاسبه کنید.

شرط $2 \leq i \leq 5$ و $x_i > 0$، یعنی این‌که $x_2 > 0$، $x_3 > 0$، $x_4 > 0$ و $x_5 > 0$ است پس:

$$x_i > 0 \xrightarrow{\text{تبدیل به تساوی}} x_i \geq 1 \Rightarrow \underbrace{x_i - 1}_{y_i} \geq 0 \Rightarrow y_i = x_i - 1 \Rightarrow x_i = y_i + 1 \;,\; 2 \leq i \leq 5$$

$$x_1+(y_2+1)+(y_3+1)+(y_4+1)+(y_5+1)=10$$

$$x_1+y_2+y_3+y_4+y_5=6 \xrightarrow[k=5]{n=6} \text{جواب} = \binom{6+5-1}{5-1} = \binom{10}{4} = 210$$

نکته:
اگر متغیرهای معادله دارای ضریب غیر از یک باشند، یا این‌که زیر رادیکال باشند، یا این‌که توان داشته باشند و ... باید با مقداردهی مناسب به آن‌ها، آن‌ها را از معادله حذف کنیم. سپس معادله موردنظر را در حالت‌های مختلف حل کرده و در نهایت جواب‌های به‌دست آمده را باهم جمع می‌کنیم.

توجه: مقداردهی به متغیرها باید به گونه‌ای باشد که
- خروجی متغیر عدد صحیحی باشد.
- طرف دوم معادله منفی نشود.

مثلاً اگر در معادله‌ای متغیر $\sqrt{x_i}$ وجود داشته باشد، مقادیر مناسب برای x_i عبارتند از: $\{0,1,4,9,\dots\}$

مثال:

تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_1+3x_2+x_3+x_4=7$ را بیابید:

می‌دانیم که باید با مقداردهی مناسب به متغیر x_2، آن را از بازی حذف کنیم:

$$x_2=0 \Rightarrow x_1+x_3+x_4=7 \xrightarrow[k=3]{n=7} \text{تعداد جواب‌ها} = \binom{7+3-1}{3-1} = \binom{9}{2} = 36$$

$$x_2=1 \Rightarrow x_1+x_3+x_4=4 \xrightarrow[k=3]{n=4} \text{تعداد جواب‌ها} = \binom{4+3-1}{3-1} = \binom{6}{2} = 15$$

$$x_2=2 \Rightarrow x_1+x_3+x_4=1 \xrightarrow[k=3]{n=1} \text{تعداد جواب‌ها} = \binom{1+3-1}{3-1} = \binom{3}{2} = 3$$

اگه $x_2 = 3$ بدیم طرف دوم نامعادله منفی می‌شه پس تا همین‌جا کافیه!

$$\text{تعداد کل جواب‌ها} = 36+15+3 = 54$$

مثال:

تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_1+\sqrt{x_2}+x_3+x_4=3$ را بیابید:

$$x_2=0 \Rightarrow x_1+x_3+x_4=3 \xrightarrow[k=3]{n=3} \text{تعداد جواب‌ها} = \binom{3+3-1}{3-1} = \binom{5}{2} = 10$$

$x_2 = 1 \Rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = 2 \xrightarrow[k=3]{n=2}$ تعداد جواب‌ها $= \binom{2+3-1}{3-1} = \binom{4}{2} = 6$

$x_2 = 4 \Rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = 1 \xrightarrow[k=3]{n=1}$ تعداد جواب‌ها $= \binom{1+3-1}{3-1} = \binom{3}{2} = 3$

$x_2 = 9 \Rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = 0 \xrightarrow[k=3]{n=0}$ تعداد جواب‌ها $= \binom{0+3-1}{3-1} = \binom{2}{2} = 1$

تعداد کل جواب‌ها $= 10 + 6 + 3 + 1 = 20$

نکته‌های مهم:

نکته ۱:

- تعداد راه‌های توزیع n شیء **یکسان** بین k نفر
- تعداد راه‌های توزیع n شیء **یکسان** در k ظرف متمایز
- تعداد راه‌های ساخت یک دسته گل شامل n شاخه از k نوع گل

همه موارد بالا با تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$ برابر است. $\binom{n+k-1}{k-1}$

نکته ۲:

- تعداد راه‌های توزیع n شیء **یکسان** بین k نفر به‌طوری که به هر نفر حداقل یک شیء برسد.
- تعداد راه‌های توزیع n شیء **یکسان** در k ظرف متمایز به‌طوری که در هر ظرف حداقل یک شیء قرار دهیم.
- تعداد راه‌های ساخت یک دسته گل شامل n شاخه از k نوع گل به‌طوری که از همه گل‌ها استفاده شود. (از هر گل حداقل یک شاخه در دسته گل استفاده شده باشد.)

همه موارد بالا با تعداد جواب‌های صحیح و مثبت معادله $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$ برابر است. $\binom{n-1}{k-1}$

مثال:

به چند طریق می‌توان از بین ۵ نوع گل، ۱۱ شاخه گل انتخاب کرد به‌طوری که:

الف) به دلخواه انتخاب کنیم:

$\begin{cases} n = 11 \\ k = 5 \end{cases} \Rightarrow$ تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی $= \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{11+5-1}{5-1} = \binom{15}{4}$

ب) از هر نوع گل، حداقل ۱ شاخه انتخاب کنیم:

تعداد جواب‌های صحیح و مثبت $= \binom{n-1}{k-1} = \binom{11-1}{5-1} = \binom{10}{4}$

پ) از گل نوع دوم حداقل ۲ شاخه و از گل نوع پنجم بیش از ۳ شاخه انتخاب کنیم:

ترجمه سؤال به زبان ریاضی:

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 11 \quad , \quad x_2 \geq 2 \quad , \quad x_5 > 3$

$x_2 \geq 2 \Rightarrow \underbrace{x_2 - 2}_{y_2} \geq 0 \Rightarrow y_2 = x_2 - 2 \Rightarrow x_2 = y_2 + 2$

$x_5 > 3 \Rightarrow x_5 \geq 4 \Rightarrow x_5 - 4 \geq 0 \Rightarrow y_5 = x_5 - 4 \Rightarrow x_5 = y_5 + 4$

$x_1 + (y_2 + 2) + x_3 + x_4 + (y_5 + 4) = 11 \Rightarrow x_1 + y_2 + x_3 + x_4 + y_5 = 5 \Rightarrow$ جواب $= \binom{5+5-1}{5-1} = \binom{9}{4}$

ث) از گل نوع دوم فقط یک شاخه، از گل نوع سوم حداقل یک شاخه و از گل نوع چهارم بیش از دو شاخه انتخاب کنیم:

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 11 \quad ; \quad x_2 = 1 \; , \; x_3 \geq 1 \; , \; x_4 > 2$

$x_3 \geq 1 \Rightarrow \underbrace{x_3 - 1}_{y_3} \geq 0 \Rightarrow y_3 = x_3 - 1 \Rightarrow x_3 = y_3 + 1$

$x_4 > 2 \Rightarrow x_4 \geq 3 \Rightarrow \underbrace{x_4 - 3}_{y_4} \geq 0 \Rightarrow y_4 = x_4 - 3 \Rightarrow x_4 = y_4 + 3$

$x_2=1$

$\Rightarrow x_1+1+(y_3+1)+(y_4+3)+x_5=11 \Rightarrow x_1+y_3+y_4+x_5=6$

$\begin{cases} n=6 \\ k=4 \end{cases} \Rightarrow$ تعداد جواب‌ها $=\binom{n+k-1}{k-1}=\binom{6+4-1}{4-1}=\binom{9}{3}$

مربع لاتین

یک جدول مربعی از اعداد ۱، ۲، ... و n به شکل یک مربع $n\times n$ را که سطرها و ستون‌های آن با اعداد ۱، ۲، ... و n پر شده باشند و در هیچ سطر آن و نیز در هیچ ستون آن عدد تکراری وجود نداشته باشد، **مربع لاتین** می‌نامیم. (به هریک از اعداد درون مربع لاتین یک **درایه** می‌گوییم.)

ـ با تعویض جای دو سطر (یا دو ستون) از یک مربع لاتین، شکل حاصل باز هم یک مربع لاتین است.

ـ برای هر عدد طبیعی مانند n، مربع لاتین $n\times n$ وجود دارد.

ـ به تعداد ۲ عدد، مربع لاتین 2×2 وجود دارد.

۱	۲
۲	۱

۲	۱
۱	۲

توجه: به تعداد ۱۲ عدد، مربع لاتین 3×3 وجود دارد.

تذکر: مربع لاتین چرخشی به‌صورت زیر است.

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \end{array}$$

مثال ⟵ مربع لاتین 4×4

۱	۲	۳	٤
٤	۱	۲	۳
۳	٤	۱	۲
۲	۳	٤	۱

در مربع لاتین چرخشی:
- درایه‌های قطر اصلی ← ۱
- ستون آخر (از پایین به بالا) به‌صورت ۱، ۲، ۳، ...، n هستند.
- سطر اول (از چپ به راست) به‌صورت ۱، ۲، ۳، ...، n هستند.

نکته:

فرض کنید A و B دو مربع لاتین هم‌مرتبه باشند به‌طوری که از کنار هم قرار دادن درایه‌های نظیر از این دو مربع، مربع جدیدی از همان مرتبه حاصل شود که هر خانه آن حاوی یک عدد دورقمی است که تمام رقم‌های سمت چپ مربوط به مربع A و تمام رقم‌های سمت راست مربوط به مربع B (و یا برعکس) است. در این‌صورت گوییم دو مربع لاتین A و B **متعامدند** هرگاه هیچ‌یک از اعداد دورقمی موجود، در خانه‌های مربع جدید تکرار نشده باشد.

مثال:

در هر مورد متعامد بودن دو مربع لاتین داده شده را بررسی کنید.

الف)

۲	۱	۳
۱	۳	۲
۳	۲	۱

۳	۲	۱
۱	۳	۲
۲	۱	۳

↓

۳۲	۲۱	۱۳
۱۱	۳۳	۲۲
۲۳	۱۲	۳۱

«متعامدند»

چرا که عدد دو رقمی تکراری نداریم.

ب)

۳	۱	۲
۲	۳	۱
۱	۲	۳

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

↓

۱۳	۲۱	۳۲
۳۲	۱۳	۲۱
۲۱	۳۲	۱۳

«متعامد نیستند»

چرا که عدد دو رقمی تکراری وجود دارد.

مثال:

مربع لاتین A را در نظر بگیرید. با اعمال جایگشت ۳→۱، ۲→۲، ۴→۳ و ۱→۴، مربع لاتین B را به‌دست آورده و متعامد بودن دو مربع لاتین A و B را بررسی کنید.

$A =$

۳	۴	۱	۲
۲	۱	۴	۳
۱	۲	۳	۴
۴	۳	۲	۱

$\xrightarrow[\text{جایگشت‌ها}]{\text{اعمال}}$

$B =$

۴	۱	۳	۲
۲	۳	۱	۴
۳	۲	۴	۱
۱	۴	۲	۳

۳۴	۴۱	۱۳	۲۲
۲۲	۱۳	۴۱	۳۴
۱۳	۲۲	۳۴	۴۱
۴۱	۳۴	۲۲	۱۳

پس دو مربع A و B متعامد نیستند چرا که عدد دورقمی تکراری در مربع بالا وجود دارد.

مثال:

اگر سه برادر تقریباً هم‌سن و سال و هم‌سایز در خانه سه کت و سه پیراهن داشته باشند و بخواهند در سه روز اول هفته از این لباس‌ها به گونه‌ای استفاده کنند که هر فرد هریک از کت‌ها و هریک از پیراهن‌ها را دقیقاً یک بار استفاده کرده باشد و هر کت با هر پیراهن نیز دقیقاً یک بار مورد استفاده قرار بگیرد، چگونه می‌توانند این کار را انجام دهند؟

	شنبه	یکشنبه	دوشنبه
A	۱	۲	۳
B	۳	۱	۲
C	۲	۳	۱

«پیراهن»

و

	شنبه	یکشنبه	دوشنبه
A	۲	۱	۳
B	۱	۳	۲
C	۳	۲	۱

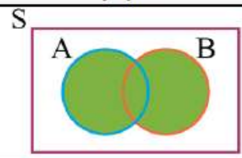
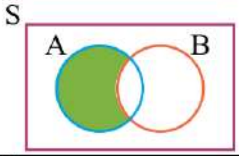
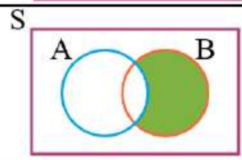
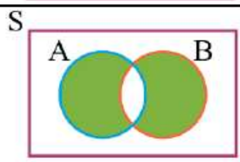
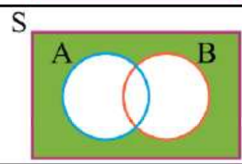
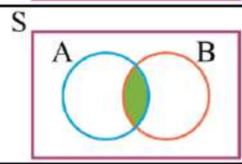
«کت»

$\Longrightarrow$

	شنبه	یکشنبه	دوشنبه
A	۱۲	۲۱	۳۳
B	۳۱	۱۳	۲۲
C	۲۳	۳۲	۱۱

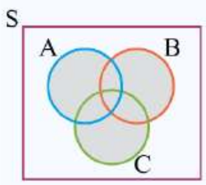
نکته‌های مهم:

نکته ۱: اگر A و B زیرمجموعه‌هایی از مجموعه متناهی S باشند:

تعریف	رابطه	نمودار
تعداد عضوهایی که در A یا B هستند. (حداقل در یکی از مجموعه‌های A یا B وجود دارند.)	$\lvert A\cup B\rvert=\lvert A\rvert+\lvert B\rvert-\lvert A\cap B\rvert$	
تعداد عضوهایی که عضو A هستند ولی عضو B نیستند. (فقط عضو A هستند.)	$\lvert A-B\rvert=\lvert A\rvert-\lvert A\cap B\rvert$	
تعداد عضوهایی که عضو B هستند ولی عضو A نیستند. (فقط عضو B هستند.)	$\lvert B-A\rvert=\lvert B\rvert-\lvert A\cap B\rvert$	
تعداد عضوهایی که فقط در یکی از مجموعه‌ها هستند. (فقط در A یا فقط در B)	$\lvert A-B\rvert+\lvert B-A\rvert$	
تعداد عضوهایی که نه در A و نه در B هستند. (در هیچ‌یک از مجموعه‌های A و B نیستند.)	$\lvert\overline{A\cup B}\rvert=\lvert\bar{A}\cap\bar{B}\rvert=\lvert S\rvert-\lvert A\cup B\rvert$	
تعداد عضوهایی که هم در A و هم در B هستند.	$\lvert A\cap B\rvert$	

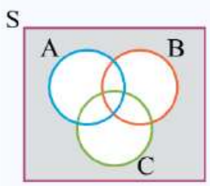
نکته ۲: اگر A، B و C زیرمجموعه‌هایی از مجموعه متناهی S باشند:

تعداد عضوهایی که در A یا B یا C هستند، برابر است با:



$$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap C|-|A\cap B|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$$

تعداد عضوهایی که نه در A و نه در B و نه در C هستند (در هیچ‌یک از مجموعه‌ها وجود ندارند) برابر است با:



$$|\overline{A\cup B\cup C}|=|\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}|=|S|-|A\cup B\cup C|$$

نکته ۳: مجموعه $S=\{1,2,3,\dots,n\}$ مفروض است:

تعداد عضوهایی از S که بر a بخش‌پذیر هستند برابر است با: $\left[\frac{n}{a}\right]$

تعداد عضوهایی از S که بر a و بر b بخش‌پذیر هستند برابر است با: $\left[\frac{n}{[a,b]}\right]$

توجه: $[a,b]$، ک.م.م دو عدد a و b است.

مثال:

در یک کلاس ۳۴ نفری، ۱۵ نفر فوتبال، ۱۱ نفر والیبال و ۹ نفر بسکتبال بازی می‌کنند. اگر بدانیم ۳ نفر هم فوتبال، هم والیبال و هم‌بسکتبال بازی می‌کنند و ۵ نفر فوتبال و والیبال، ۶ نفر والیبال و بسکتبال و ۳ نفر فوتبال و بسکتبال بازی کنند، مشخص کنید چند نفر فقط در یک‌رشته بازی می‌کنند؟

$|F|=15$

$|V|=11$

$|B|=9$

$|F\cap V|=5$

$\text{فقط فوتبال}=|F|-|F\cap V|-|F\cap B|+|F\cap B\cap V|=15-5-3+3=10$

$\text{فقط والیبال}=|V|-|F\cap V|-|V\cap B|+|F\cap B\cap V|=11-5-6+3=3$

$\text{فقط بسکتبال}=|B|-|F\cap B|-|V\cap B|+|F\cap B\cap V|=9-3-6+3=3$

$\text{فقط در یک رشته}=10+3+3=16$

مثال:

در یک کلاس ۲۵ نفری، ۱۵ نفر فوتبال و ۱۴ نفر والیبال بازی می‌کنند. مشـخص کنید چند نفر نه فوتبال بازی می‌کنند و نه والیبال به شـرط آن‌که بدانیم ۹ نفر هم فوتبال و هم والیبال بازی می‌کنند.

$$|\overline{F\cup V}|=|S|-|F\cup V|=25-(15+14-9)=5$$

مثال:

چند عدد طبیعی مانند n به‌طوری که $1\le n\le 400$ وجود دارد که:

الف) بر ۵ یا ۷ بخش‌پذیر باشند.

$$A=\{n\in\mathbb{N}\mid 1\le n\le 400,\ n=5k\}\Rightarrow |A|=\left[\frac{400}{5}\right]=80$$

$$B=\{n\in\mathbb{N}\mid 1\le n\le 400,\ n=7k\}\Rightarrow |B|=\left[\frac{400}{7}\right]=57$$

$$A\cap B=\{n\in\mathbb{N}\mid 1\le n\le 400,\ n=35k\}\Rightarrow |A\cap B|=\left[\frac{400}{35}\right]=11$$

$$\Rightarrow |A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|=80+57-11=126$$

ب) بر ۵ بخش‌پذیر است ولی بر ۷ بخش‌پذیر نیست.

$$|A\cap B'|=|A-B|=|A|-|A\cap B|=80-11=69$$

پ) نه بر ۵ و نه بر ۷ بخش‌پذیر باشند. (بر هیچ‌یک از اعداد ۵ و ۷ بخش‌پذیر نباشند.)

$$|\overline{A\cup B}|=|S|-|A\cup B|=400-(80+57-11)=274$$

ت) فقط بر یکی از اعداد ۵ یا ۷ بخش‌پذیر باشند.

$$|A-B|+|B-A|=|A\cup B|-|A\cap B|=|A|+|B|-2|A\cap B|=80+57-2(11)=115$$

مثال:

به چند طریق می‌توان ۴ خودکار متفاوت را بین سه نفر توزیع کرد به شرط آن‌که به هر نفر حداقل ۱ خودکار داده باشیم؟ (راه‌حل نوشته شود)

این سؤال رو جور دیگه‌ای هم میشه طرح کرد، یعنی به جای این سؤال می‌تونن از ما تعداد توابع پوشا از یک مجموعه ۴ عضوی به یک مجموعه ۳ عضوی رو بپرسن؛ بریم که حلش کنیم.

روش اول: با استفاده از اصل شمول و عدم شمول:

$A_i=\{f:A\to B \mid f(a_i)\neq b_j \ , \ i=1,2,3,4 \ , \ j=1,2,3\}$

$A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$

$B=\{b_1,b_2,b_3\}$

$|S|=3^4=81$ $\qquad |A_1|=|A_2|=|A_3|=2^4=16$

$|A_1\cap A_2|=|A_1\cap A_3|=|A_2\cap A_3|=1^4=1$ $\qquad |A_1\cap A_2\cap A_3|=0$

$\Rightarrow |\overline{A_1\cup A_2\cup A_3}|=|S|-|A_1\cup A_2\cup A_3|=81-((3\times16)-(3\times1)+0)=36$

روش دوم:

تعداد توابع پوشا از یک مجموعه ۴ عضوی به یک مجموعه ۳ عضوی برابر است با:

$3^n-3(2^n)+3 \xrightarrow{n=4} 3^4-3(2^4)+3=81-48+3=36$

اگه همچین سؤالی مطرح شد من جای شما باشم هر دوتا روش رو می‌نویسم!

نکته‌های مهم:

۱) تعداد کل توابع از یک مجموعه n عضوی به یک مجموعه m عضوی برابر است با: m^n

۲) تعداد کل توابع پوشا از یک مجموعه n عضوی به یک مجموعه m عضوی برابر است با: $(n\geq m)$

$m!\times$(تعداد افرازهای m تایی مجموعه n عضوی)

۳) تعداد کل توابع پوشا روی یک مجموعه n عضوی برابر است با: $n!$

۴) حالت‌های مهم

۱) تعداد کل توابع پوشا از یک مجموعه n عضوی به یک مجموعه ۳ عضوی برابر است با: $(n\geq 3)$

$3^n-3(2^n)+3$

۲) تعداد کل توابع پوشا از یک مجموعه n عضوی به یک مجموعه ۲ عضوی برابر است با: $(n\geq 2)$

2^n-2

۵) تعداد توابع یک‌به‌یک از یک مجموعه n عضوی به یک مجموعه m عضوی برابر است با $(m\geq n)$

$$P(m,n)=\frac{m!}{(m-n)!}$$

۶) تعداد توابع یک‌به‌یک روی یک مجموعه n عضوی برابر است با: $n!$

مثال:

از یک مجموعه ۵ عضوی به یک مجموعه ۳ عضوی:

چه تعداد تابع می‌توان تعریف کرد؟ 3^5

چه تعداد تابع پوشا می‌توان تعریف کرد؟ $3^5-3(2^5)+3$

چه تعداد تابع یک‌به‌یک می‌توان تعریف کرد؟ از یک مجموعه با تعداد عضو بیش‌تر به یک مجموعه با تعداد عضو کم‌تر تابع یک‌به‌یک نمی‌توان تعریف کرد.

مثال:

تعداد تابع‌های یک‌به‌یک از یک مجموعه ۳ عضوی به یک مجموعه ۶ عضوی چندتا است؟

$$P(6,3)=\frac{6!}{(6-3)!}=\frac{6!}{3!}=120$$

نکته‌های مهم:

- توزیع n شیء **متمایز** بین m نفر = تعداد کل توابع از یک مجموعه n عضوی به یک مجموعه m عضوی
- توزیع n شیء **متمایز** بین m نفر به‌طوری که به هر نفر **حداقل یک شیء** برسد = تعداد توابع پوشا از مجموعه n عضوی به مجموعه m عضوی $(n \geq m)$
- توزیع n شیء **متمایز** بین m نفر به‌طوری که به هر نفر **حداکثر یک شیء** برسد = تعداد توابع یک‌به‌یک از مجموعه n عضوی به مجموعه m عضوی $(m \geq n)$

مثال:

به چند طریق می‌توان ۵ سیب را بین ۳ نفر توزیع کرد به‌طوری که هر نفر حداقل یک سیب داشته باشد؟

باید تعداد توابع پوشایی که از مجموعه ۵ عضوی به یک مجموعه ۳ عضوی وجود دارد را پیدا کرد که برابر است با:

$$3^n - 3\left(2^n\right) + 3 \xrightarrow{n=5} 3^5 - 3\left(2^5\right) + 3 = 243 - 96 + 3 = 150$$

مثال:

به چند طریق می‌توان ۴ خودکار متفاوت را بین ۸ نفر توزیع کرد به شرط آن‌که هیچ‌کس بیش‌تر از یک خودکار نداشته باشد؟ (به هر نفر حداکثر یک خودکار داده باشیم.)

تعداد حالت‌های ممکن برای انجام این کار معادل است با پیدا کردن تعداد تابع‌های یک‌به‌یک از مجموعه ۴ عضوی به مجموعه‌ای ۸ عضوی، یعنی:

$$P(8,4) = \frac{8!}{(8-4)!} = \frac{8!}{4!} = 1680$$

مثال:

۸ نفر را که برای یک برنامه تلویزیونی پیامک ارسال کرده‌اند، انتخاب کرده‌ایم و می‌خواهیم در ۴ مرحله و در هر مرحله یک جایزه را به یکی از این ۸ نفر (با قرعه‌کشی) به دلخواه بدهیم. این عمل به چند طریق امکان‌پذیر است؟ (یک نفر می‌تواند ۴ جایزه را برنده شود.)

حل مسئله معادل با یافتن تعداد تابع‌های ممکن از یک مجموعه ۴ عضوی به یک مجموعه ۸ عضوی است که برابر است با: $8^4 = 4096$

اصل لانه کبوتری

اگر m کبوتر و n لانه داشته باشیم $(m > n)$، و همه کبوترها درون لانه‌ها قرار بگیرند، در این‌صورت لانه‌ای وجود دارد که حداقل ۲ کبوتر در آن قرار گرفته است.

مثال:

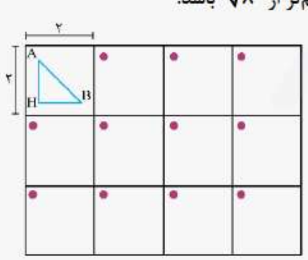
ثابت کنید در بین هر سه عدد طبیعی، حداقل دو عدد طبیعی وجود دارد که مجموعشان زوج است.

برای این‌که مجموع دو عدد زوج باشد، هردو عدد یا باید زوج باشند و یا هردو فرد. بنابراین تعداد لانه‌ها برابر ۲ و تعداد کبوترها ۳ است.

طبق اصل لانه کبوتری حداقل یک لانه وجود دارد که دو کبوتر در آن قرار می‌گیرد یعنی حداقل دو عدد طبیعی از بین سه عدد وجود دارد که مجموعشان زوج خواهد شد.

مثال:

۱۳ نقطه درون یک مستطیل 8×6 قرار دارند، نشان دهید حداقل ۲ نقطه از این ۱۳ نقطه وجود دارند که فاصله آن‌ها از هم، کم‌تر از $\sqrt{8}$ باشد.



۱۲ = تعداد لانه‌ها

۱۳ = تعداد کبوترها

طبق اصل لانه کبوتری دو نقطه مانند A و B در یک لانه جای می‌گیرند پس:

$$\begin{rcases} AH < 2 \\ BH < 2 \end{rcases} \Rightarrow AH^2 + BH^2 < 8 \Rightarrow AB^2 < 8 \Rightarrow AB < \sqrt{8}$$

مثال:

مجموعه اعداد $A=\{۱,۲,۳,...,۸۴\}$ را در نظر بگیرید. نشان دهید هر زیرمجموعه ۴۳ عضوی از A دارای ۲ عضو است که مجموعشان برابر ۸۵ است.

۴۳ = تعداد کبوترها

$$\text{تعداد لانه‌ها} = ۴۲ \xrightarrow{\text{ببینید}} \underbrace{\quad}_{۱,۸۴}\ ,\ \underbrace{\quad}_{۲,۸۳}\ ,\ \underbrace{\quad}_{۳,۸۲}\ ,\ \cdots\ ,\ \underbrace{\quad}_{۴۲,۴۳}$$

چنان‌چه قرار باشد کبوترها لانه‌ها را اشغال کنند، آن‌گاه طبق اصل لانه کبوتری حداقل دو عدد وجود دارد که در یک لانه جای می‌گیرند و مجموعشان برابر ۸۵ است.

تعمیم اصل لانه‌کبوتری:

هرگاه $(kn+۱)$ کبوتر یا بیش‌تر در n لانه قرار بگیرند، در این‌صورت لانه‌ای وجود دارد که حداقل $(k+۱)$ کبوتر در آن قرار گرفته است.

مثال:

۵۴ شاخه گل را حداکثر در چند گلدان قرار دهیم تا اطمینان داشته باشیم گلدانی هست که در آن حداقل ۵ شاخه گل قرار گرفته است؟

$$k+۱=۵ \Rightarrow k=۴$$

$$kn+۱=۵۴ \xrightarrow{k=۴} ۴n+۱=۵۴ \Rightarrow ۴n=۵۳ \Rightarrow n=\left[\frac{۵۳}{۴}\right]=۱۳$$

مثال:

ثابت کنید اگر در یک دبیرستان حداقل ۵۰۵ دانش‌آموز مشغول به تحصیل باشند لااقل ۷ نفر از آن‌ها روز هفته و ماه تولدشان یکسان است.

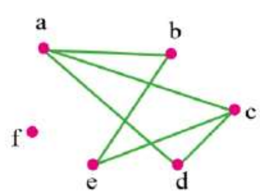
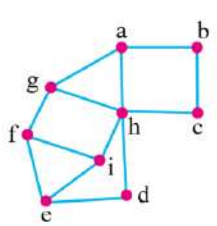
۵۰۵ = تعداد کبوترها

تعداد لانه‌ها = تعداد روزهای هفته × تعداد ماه‌های سال $\Rightarrow n=۷\times۱۲=۸۴$

مطابق تعمیم اصل لانه کبوتری:

$$\text{تعداد کبوترها}=kn+۱ \xrightarrow{n=۸۴} ۵۰۵=۸۴k+۱ \Rightarrow k=۶ \Rightarrow k+۱=۷$$

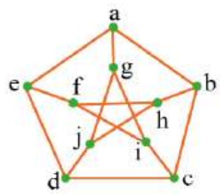
در این‌صورت لانه‌ای وجود دارد که لااقل ۷ کبوتر در آن قرار می‌گیرند. یعنی حداقل ۷ نفر از دانش‌آموزان روز هفته و ماه تولدشان یکسان است.

ردیف	سوالات	نمره
۱	درست یا نادرست بودن جملات زیر را مشخص کنید. الف) معادله هم‌نهشتی $ax \overset{m}{\equiv} b$ دارای جواب است اگر و تنها اگر $(a,b)\,|\,m$ ب) در بین تمام مجموعه‌های احاطه‌گر گراف G، مجموعه یا مجموعه‌های احاطه‌گری که کم‌ترین تعداد عضو را دارند، مجموعه احاطه‌گر مینیمال گراف G می‌نامیم. پ) تعداد رأس‌های فرد هر گراف، عددی زوج است.	۰/۷۵
۲	در جاهای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید. الف) a و b اعدادی صحیح و a مخالف صفر است. اگر $a\|b$ آن‌گاه عدد .... شمارنده عدد .... است. ب) گراف G را .... می‌نامیم هرگاه بین هردو رأس آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد. پ) در یک گراف از مرتبه ۱۰ با ۳ = Δ حداقل .... رأس برای احاطه همه رئوس لازم است.	۰/۷۵
۳	ثابت کنید میانگین حسابی دو عدد نامنفی از میانگین هندسی آن‌ها کم‌تر نیست.	۱
۴	اگر a عددی طبیعی باشد، حاصل (۵a+۴ , ۲a+۳) را به‌دست آورید.	۱
۵	باقی‌مانده تقسیم $(۱۹+۳۸^{۳۶})$ را بر ۴ به‌دست آورید.	۱
۶	اگر باقی‌مانده تقسیم اعداد m و n بر ۱۷ به ترتیب ۵ و ۳ باشد، در این‌صورت باقی‌مانده تقسیم عدد (۲m−۵n) بر ۱۷ را محاسبه کنید.	۱
۷	اگر در یک سال، اول مهر شنبه باشد، در این‌صورت ۱۲ بهمن در همان سال چه روزی است؟	۱
۸	معادله سیاله ۶x+۷y=۱۸۵ را حل کرده و جواب عمومی آن را بنویسید.	۱/۵
۹	گراف G به‌صورت مقابل رسم شده است. به سؤالات زیر پاسخ دهید.  الف) مرتبه و اندازه گراف G را بنویسید. ب) $\Delta(G)$ را مشخص کنید. پ) مکمل گراف G را رسم کرده و مجموع درجه‌های رئوس گراف $\overline{G}$ را مشخص کنید. ت) دوری به طول ۵ برای رأس a بنوسید. ث) یک مسیر به طول ۴ از d به c بنویسید. ج) $N_G(c)$ را با اعضا بنویسید. چ) آیا گراف G همبند است؟	۲/۲۵
۱۰	در گراف شکل زیر یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال مشخص کنید که مینیمم نباشد. 	۰/۵

گروه آموزشی ماز

نمونه سوال دی ماه | پایه دوازدهم دورهٔ دوم متوسطه

نام و نام خانوادگی: | سوالات امتحان نهایی درس: ریاضیات گسسته | رشته: ریاضی فیزیک

ردیف	سوالات	نمره
۱۱	باتوجه به گراف مقابل: الف) عدد احاطه‌گری گراف را مشخص کرده و ادعای خود را ثابت کنید. ب) یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال ۵ عضوی را مشخص کنید.  	۱/۷۵
۱۲	یک گراف ۶ رأسی که ۷– مجموعه آن با اندازه دو باشد، رسم کنید.	۰/۵
۱۳	کوتاه پاسخ دهید. علی و حسین و ۵ نفر دیگر را به چند طریق می‌توان در یک صف کنار هم قرار داد، به‌طوری که: الف) علی و حسین کنار هم باشند. ب) ابتدا و انتهای صف علی و حسین ایستاده باشند.	۱
۱۴	معادله $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=12$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد به شرط آن‌که $x_3=4$ و $x_5>2$ باشد؟	۱/۵
۱۵	مربع لاتین A را در نظر بگیرید. ابتدا سطر اول و سطر دوم مربع A را جابه‌جا کنید. سپس در مربع حاصل ستون دوم و سوم را جابه‌جا کنید و مربع حاصل را B نامگذاری کنید. متعامد بودن دو مربع لاتین A و B را بررسی کنید. $A=\begin{array}{\|c\|c\|c\|}\hline 2 & 3 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 3 & 1 & 2 \\ \hline\end{array}$	۱/۵
۱۶	مجموعه $A=\{1,2,\cdots,350\}$ را در نظر بگیرید. چند عدد در A وجود دارند به‌طوری که بر هیچ‌یک از اعداد ۴ و ۶ بخش‌پذیر نباشند.	۱
۱۷	چهار کلاه متفاوت در اختیار داریم: الف) به چند طریق می‌توان آن‌ها را بین ۳ نفر توزیع کرد به شرطی که به هر نفر حداقل یک کلاه داده شود؟ ب) به چند طریق می‌توان آن‌ها را بین ۸ نفر توزیع کرد به شرطی که به هر نفر حداکثر یک کلاه داده شود؟	۱
۱۸	حداقل چند نفر در یک سالن همایش حضور داشته باشند تا مطمئن باشیم دست کم ۳ نفر وجود دارند که دو حرف اول و دوم نام خانوادگی آن‌ها مانند هم و غیرتکراری است؟	۱
	موفق باشید	۲۰

ردیف	پاسخنامه	نمره

۱ — الف) نادرست (۰/۲۵) ب) نادرست (۰/۲۵) پ) درست (۰/۲۵) — **۰/۷۵**

۲ — الف) عدد a شمارنده عدد b است (۰/۲۵) ب) گراف همبند (۰/۲۵) پ) ۳ رأس (۰/۲۵) — **۰/۷۵**

$$\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil \to \gamma(G) \geq \left\lceil \frac{10}{3+1} \right\rceil \to \gamma(G) \geq 3$$

۳ — **۱**

پاسخ تشریحی:

اگر دو عدد a و b نامنفی باشند، حکم مسئله برابر است با: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ (۰/۵)

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow \underbrace{a+b-2\sqrt{ab} \geq 0}_{(0/25)} \Leftrightarrow \underbrace{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0}_{(0/25)}$$

گزاره فوق همیشه درست است.

۴ — **۱**

پاسخ تشریحی:

$$(5a+4, 2a+3) = d$$

$$d \mid 5a+4 \xrightarrow[\text{سمت راست}]{\times 2} d \mid 10a+8 \quad (0/25)$$

$$d \mid 2a+3 \xrightarrow[\text{سمت راست}]{\times 5} d \mid 10a+15 \quad (0/25)$$

$$\xrightarrow[\text{سمت راست}]{(-)} \underbrace{d \mid 7}_{(0/25)} \to \underbrace{d=1 \text{ یا } d=7}_{(0/25)}$$

۵ — **۱**

پاسخ تشریحی:

$$38 = (4\times 9)+2 \to \underbrace{38 \overset{4}{\equiv} 2}_{(0/25)} \xrightarrow[\text{به توان ۲}]{\text{طرفین}} \underbrace{38^2 \overset{4}{\equiv} 2 \overset{4}{\equiv} 0}_{(0/25)}$$

$$\xrightarrow[\text{به توان ۱۸}]{\text{طرفین}} \underbrace{38^{36} \overset{4}{\equiv} 0}_{(0/25)} \xrightarrow[+19]{\text{طرفین}} 38^{36}+19 \overset{4}{\equiv} 19 \overset{4}{\equiv} 3 \to r=3 \quad (0/25)$$

۶ — **۱**

پاسخ تشریحی:

$$m = 17q+5 \xrightarrow{\times 2} 2m = 17(2q)+10 \quad (0/25)$$

$$n = 17q'+3 \xrightarrow{\times 5} 5n = 17(5q')+15$$

$$2m-5n = 17(\underbrace{2q-5q'}_{k})-5 \quad (0/25) \to 2m-5n = 17k-5+17-17$$

$$\to 2m-5n = 17k-17+12 \quad (0/25) \to 2m-5n = 17(\underbrace{k-1}_{k'})+12 = 17k'+12 \to \underbrace{r=12}_{(0/25)}$$

۷ — **۱**

پاسخ تشریحی:

فاصله ۱ مهر تا ۱۲ بهمن برابر است با:

۱۳۱ = (۱۲ روز در بهمن) + (۳۰ روز دی) + (۳۰ روز آذر) + (۳۰ روز آبان) + (۲۹ روز در مهر) (۰/۲۵)

از طرفی: $131 \overset{7}{\equiv} 5$ (۰/۲۵)

بنابراین طبق جدول زیر ۱۲ بهمن پنجشنبه است (۰/۲۵)

ش	ی	د	س	چ	پ	ج
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

(۰/۲۵)

ردیف	پاسخنامه	نمره

۸ — نمره: **۱/۵**

پاسخ تشریحی:

$$۶x+۷y=۱۸۵ \to \overbrace{۶x \overset{۷}{\equiv} ۱۸۵}^{(۰/۲۵)} \to ۶x \overset{۷}{\equiv} (۲۳\times۷)+۲۴ \to ۶x \overset{۷}{\equiv} ۲۴ \quad (۰/۲۵)$$

$$\xrightarrow{\overbrace{(۶,۷)=۱}^{(۰/۲۵)}} x \overset{۷}{\equiv} ۴ \to x=۷k+۴ \quad (۰/۲۵)$$

حال $x=۷k+۴$ را در معادله سیاله قرار می‌دهیم:

$$\underbrace{۶(۷k+۴)+۷y=۱۸۵}_{(۰/۲۵)} \to y=-۶k+۲۳ \quad (۰/۲۵)$$

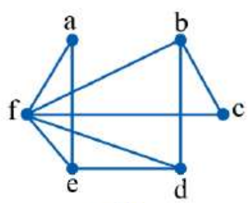
۹ — نمره: **۲/۲۵**

پاسخ تشریحی:

الف)
$$\begin{cases} p(G)=۶ & (۰/۲۵) \\ q(G)=۶ & (۰/۲۵) \end{cases}$$

ب) $\Delta(G)=۳ \quad (۰/۲۵)$

پ)



(۰/۲۵)

تعداد یال‌های گراف $\overline{G}$ $= q(\overline{G}) = ۹$

$$\sum_{i=۱}^{p} \deg = ۲q = ۲(۹) = ۱۸ \quad (۰/۲۵)$$

ت) abecda (۰/۲۵)

ث) dabec (۰/۲۵)

ج) $N_G(c)=\{a,e,d\}$ (۰/۲۵)

چ) خیر (۰/۲۵) ـ زیرا مثلاً از f به a مسیری وجود ندارد.

۱۰ — نمره: **۰/۵**

پاسخ تشریحی:

مجموعه‌ای مانند: $D=\{a,c,i,d\}$ (۰/۵)

به مجموعه‌های مشابه که ویژگی مسئله را داشته باشند، نمره تعلق می‌گیرد.

۱۱ — نمره: **۱/۷۵**

پاسخ تشریحی:

الف)
$$\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{n}{\Delta+۱} \right\rceil \to \gamma(G) \geq \left\lceil \frac{۱۰}{۳+۱} \right\rceil \to \gamma(G) \geq ۳ \quad (۰/۵)$$

از طرفی مجموعه $D=\{g,h,d\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای گراف است (۰/۲۵) پس $\gamma(G) \leq ۳$ (۰/۲۵) بنابراین $\gamma(G)=۳$ (۰/۲۵)

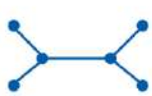
ب) مجموعه‌ای مانند: $A=\{h,g,f,i,j\}$ (۰/۵)

به مجموعه‌های مشابه که ویژگی مسئله را داشته باشند، نمره تعلق می‌گیرد.

۱۲ — نمره: **۰/۵**

پاسخ تشریحی:

گرافی مانند:



(۰/۵)

به موارد دیگری که ویژگی‌های مسئله را داشته باشند، نمره تعلق می‌گیرد.

ردیف	پاسخنامه	نمره

ردیف ۱۳ — نمره: ۱

پاسخ تشریحی:

الف)

۵	۴	۳	۲	۱	علی و حسین

جایگشت بسته = $!۲$

جایگشت بقیه + بسته = $!۶$ ⟵ جایگشت کل = $!۶×!۲$

(۰/۵)

ب)

علی (ابتدا) ○ ○ ○ ○ ○ حسین (انتها) $\Rightarrow !۵$

حسین (ابتدا) ○ ○ ○ ○ ○ علی (انتها) $\Rightarrow !۵$

$\Rightarrow$ جایگشت کل = $۲\times !۵$

(۰/۵)

ردیف ۱۴ — نمره: ۱/۵

پاسخ تشریحی:

$$x_۱+x_۲+x_۳+x_۴+x_۵+x_۶=۱۲ \quad , \quad x_۳=۴ \ , \ x_۵>۲$$

$$x_۵>۲ \Rightarrow x_۵\geq ۳ \Rightarrow \underbrace{x_۵-۳}_{y_۵}\geq ۰ \Rightarrow y_۵=x_۵-۳ \Rightarrow x_۵=y_۵+۳ \qquad (۰/۵)$$

$$x_۱+x_۲+۴+x_۴+(y_۵+۳)+x_۶=۱۲ \Rightarrow x_۱+x_۲+x_۴+y_۵+x_۶=۵ \qquad (۰/۵)$$

$$\text{تعداد جواب‌ها}=\binom{n+k-۱}{k-۱}=\binom{۵+۵-۱}{۵-۱}=\binom{۹}{۴}$$

(۰/۵)

ردیف ۱۵ — نمره: ۱/۵

پاسخ تشریحی:

$A=$

۲	۳	۱
۱	۲	۳
۳	۱	۲

$\xrightarrow{\text{جابه‌جایی سطر اول و دوم}}$

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

(۰/۲۵)

$\xrightarrow{\text{جابه‌جایی ستون دوم و سوم}} B=$

۱	۳	۲
۲	۱	۳
۳	۲	۱

(۰/۲۵)

$\Rightarrow$

۲۱	۳۳	۱۲
۱۲	۲۱	۳۳
۳۳	۱۲	۲۱

(۰/۵)

متعامد نیستند. زیرا در مربع آخر، عدد دورقمی تکراری وجود دارد. (۰/۵)

ردیف ۱۶ — نمره: ۱

پاسخ تشریحی:

$$\left.\begin{array}{l} A=\{n\in\mathbb{N} \mid ۱\leq n\leq ۳۵۰ \ , \ n=۴k\} \Rightarrow |A|=\left[\dfrac{۳۵۰}{۴}\right]=۸۷ \\ B=\{n\in\mathbb{N} \mid ۱\leq n\leq ۳۵۰ \ , \ n=۶k\} \Rightarrow |B|=\left[\dfrac{۳۵۰}{۶}\right]=۵۸ \end{array}\right\} (۰/۲۵)$$

$$A\cap B=\{n\in\mathbb{N} \mid ۱\leq n\leq ۳۵۰ \ , \ n=۱۲k\} \Rightarrow |A\cap B|=\left[\dfrac{۳۵۰}{۱۲}\right]=۲۹ \qquad (۰/۲۵)$$

$$|\bar{A}\cap\bar{B}|=|\overline{A\cup B}|=|S|-|A\cup B|=\underbrace{|S|-\big(|A|+|B|-|A\cap B|\big)}_{(۰/۲۵)}=۳۵۰-(۸۷+۵۸-۲۹)=۲۳۴$$

(۰/۲۵)

ردیف	پاسخنامه	نمره
۱۷	**پاسخ تشریحی:** الف) تعداد حالت‌های ممکن برای انجام این کار معادل است با پیدا کردن تعداد توابع پوشا از مجموعه ۴ عضوی به مجموعه‌ای ۳ عضوی، که برابر است با: $۳^n - ۳\left(۲^n\right) + ۳ \xrightarrow{n=۴} ۳^۴ - ۳\left(۲^۴\right) + ۳ = ۸۱ - ۴۸ + ۳ = ۳۶$ (۰/۵) ب) تعداد حالت‌های ممکن برای انجام این کار معادل است با پیدا کردن تعداد توابع یک‌به‌یک از مجموعه ۴ عضوی به مجموعه‌ای ۸ عضوی، که برابر است با: $P(۸,۴) = \frac{۸!}{(۸-۴)!} = \frac{۸!}{۴!} = ۱۶۸۰$ (۰/۵)	۱
۱۸	**پاسخ تشریحی:** $n = ۳۲ \times ۳۱ = ۹۹۲$ = تعداد لانه‌ها (۰/۲۵) $k + ۱ = ۳ \Rightarrow k = ۲$ (۰/۲۵) $kn + ۱ = (۲ \times ۹۹۲) + ۱ = ۱۹۸۵$ = تعداد کبوترها (۰/۵)	۱
	موفق باشید	۲۰